Feuille d'exercices n° 1

FORMES BILINÉAIRES - FORMES QUADRATIQUES

1 Formes bilinéaires

Exercice 1. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues d'un intervalle $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$. Pour $f,g \in E$ on pose

$$b(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Monter que b est une forme bilinéaire sur $E \times E$.

Exercice 2. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A,B) & \longmapsto & \mathrm{Tr}({}^tAB). \end{array}$

1. Vérifier que φ est une application bilinéaire.
2. Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En déduire le rang de φ.

Exercice 3 (Formes bilinéaires sur $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$)**.**

Soit $\mathbb{K}$ un corps, n,m deux entiers positifs non nuls. Montrer que $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m)$ est égal à

$$\{b : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \to \mathbb{K} \mid \exists b_{ij} \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \text{ t.q. } b((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_m)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij}x_iy_j\}.$$

Exercice 4. Soit E et F des espaces vectoriels de dimension finie et soient $u \in \mathrm{End}(E)$ et $v \in \mathrm{End}(F)$. Soit $b : E \times F \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. On définit $b' : E \times F \to \mathbb{K}$ par $b'(x,y) = b(u(x),v(y))$. Soient $\mathcal{B} \subset E$ et $\mathcal{C} \subset F$ des bases. Relativement à ces dernières, déterminer la matrice de b' en fonction de celle de b.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit b une forme bilinéaire sur E. Soit $\mathcal{F}$ une famille de m vecteurs dans E. Notons $\mathcal{F} = \{v_1,\dots,v_m\}$, on définit la matrice de Gram de $\mathcal{F}$:

$$G(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} b(v_1,v_1) & \cdots & b(v_1,v_m) \\ \vdots & & \vdots \\ b(v_m,v_1) & \cdots & b(v_m,v_m) \end{pmatrix}$$

et on appelle déterminant de Gram de $\mathcal{F}$ son déterminant.

1. Montrer que si $\mathcal{F}$ est liée alors $\det G(\mathcal{F}) = 0$
2. Si b est non dégénérée, $\mathcal{F}$ est libre et $n = m$, montrer que $\det G(\mathcal{F}) \neq 0$.

2 Formes quadratiques

Exercice 6. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et $Q(E)$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E.

1. Quelle est la dimension de $Q(E)$? (Pensez en termes de matrices et à l'isomorphisme avec l'espace des formes bilinéaires symétriques.)

Soit $I = \{(i,j) \in \{1,2,3\}^2 \mid 1 \leq i \leq j \leq 3\}$. Pour tout couple $(i,j) \in I$ on note q_{ij} l'application de E vers $\mathbb{R}$ défini par : $q_{ij}(x_1, x_2, x_3) = x_i x_j$.

2. Expliciter tous les q_{ij}. Combien y en a-t-il ?
3. Montrer que chacun des q_{ij} est une forme quadratique et que l'ensemble $\{q_{ij} \mid (i,j) \in I\}$ est une base de $Q(E)$.

Exercice 7. On note $E = \mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$ et $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f^2(t)dt - \left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2$.

1. Montrer que ϕ est une forme quadratique sur E et exprimer sa forme polaire.
2. Montrer que ϕ est positive et déterminer le noyau de ϕ.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur un corps $\mathbb{K}$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Pour $x \in E$, on note $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{K}$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Soit q l'application de E vers $\mathbb{K}$ définie comme suit : $q(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

1. Montrer que q est une forme quadratique en trouvant sa forme polaire.
2. Donner la matrice de q relativement à la base $\mathcal{B}$.
3. Utiliser l'orthogonalisation de Gauss pour trouver une base orthogonale en fonction de $\mathcal{B}$.

Exercice 9. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. Soit q la forme quadratique donnée par

$$q(x,y,z,t) = 4(x - y + z + 2t)^2 - 5(y + 2z - t)^2 + 7(3z - t)^2.$$

1. Trouver une base dans laquelle la matrice de q est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(4, -5, 7, 0)$. On note $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ une telle base.
2. Soit $\mathcal{B}_2 = \left(\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}u_1, u_2 + u_4, \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{7}}u_3, u_4\right)$. Quelle est la matrice de q relativement à la base $\mathcal{B}_2$?
3. Que peut-on dire du vecteur u_4 ?
4. Trouver (à partir de $\mathcal{B}_1$) une base $\mathcal{B}_3$ pour laquelle la matrice de q est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, -1, 1, 0)$.
5. La base $\mathcal{B}_3$ est-elle la seule pour laquelle la matrice de q est $\mathrm{Diag}(1, -1, 1, 0)$ (à l'ordre près de ses éléments) ?

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On note $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$.

1. Vérifier que ϕ est une forme quadratique positive sur $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer le cône isotrope de ϕ, c'est-à-dire $C(\phi) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x) = 0\}$.

Exercice 11. Sur $\mathbb{R}^3$, donner la forme polaire, la matrice dans la base canonique, orthogonaliser (donner une base orthogonale et la matrice associée) et donner la signature des formes quadratiques suivantes :

1. $q(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 19z^2 - 8xy + 12xz - 18yz$.
2. $q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 8z^2 - 4xy + 6xz - 10yz$.
3. $q(x, y, z) = 8xy - 16xz - 8yz$.

Exercice 12. Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On ne suppose pas E de dimension finie. On suppose q définie. Montrer que q est soit définie-positive soit définie-négative.

Indication On pourra raisonner par l'absurde comme suit : Soient u et v dans E tels que $q(u)q(v) < 0$. Étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = q((1-t)u + tv)$ sur $[0, 1]$.