Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2013-2014
Math I - CPGEI

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 10
Analyse réelle

Exercice 1. Soit $f : \mathbf{R}_+^\star \to \mathbf{R}$.
En quels points $a \in \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ la fonction f peut-elle admettre une limite ?

Exercice 2. Étudier l'existence d'une limite en $+\infty$ pour $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \sin(x)$.

Exercice 3. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. On suppose

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall n \in \mathbf{N}^\star,\ \exists x_n \in \mathbf{R},\ \left(|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0 \right).$$

Que peut-on en conclure ?

Exercice 4. Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$, $x_0 \in]a,b[$ et $f :]a,b[\to \mathbf{R}$.
On suppose que f est continue en x_0 et que $f(x_0) > 0$.
Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I inclus dans $]a,b[$ et contenant x_0 tel que $\forall x \in I,\ f(x) > 0$.

Exercice 5. Étudier la continuité des fonctions suivantes en tout point de leur domaine :

1. $f_1 : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R},\ x \longmapsto \begin{cases} x\,E\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$;
2. $f_2 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R},\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbf{Q}^\star \\ x & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 6. Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$. Montrer que si f est continue, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in [0,1]^2, (|x-y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

Indication : raisonner par contraposée et introduire des suites.

Exercice 7. Soit $E \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ tel que

(i) pour tout $x \in E$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset E$;

(ii) pour tout $x \in E^c$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset E^c$.

1. Montrer que l'application
$$\chi_E : \mathbf{R} \longrightarrow \{0,1\},\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
est continue.
2. En déduire que $E = \emptyset$ ou $E = \mathbf{R}$.

Exercice 8. Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une application continue.

1. Montrer que, si $f([0,1]) \subset [0,1]$, alors f possède un point fixe.
2. Faire de même en supposant cette fois que $[0,1] \subset f([0,1])$.

Exercice 9. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continues qui vérifient la condition

$$(*) \quad : \qquad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x+y) = f(x)\, f(y)\,.$$

Soit f vérifiant $(*)$.

1. Montrer que : $\forall n \geq 2$, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$.
2. Quelles sont les valeurs possibles pour $f(0)$?
3. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Que peut-on dire de f ?
   On suppose désormais que f ne s'annule pas.
4. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+^\star$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = \alpha^n$.
5. Montrer que : $\forall k \in \mathbf{Z}$, $f(k) = \alpha^k$.
6. Montrer que : $\forall r \in \mathbf{Q}$, $f(r) = \alpha^r$.
7. Conclure.

Exercice 10. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivables.
On pose $h = \min(\{f, g\})$, autrement dit $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto \min(\{f(x), g(x)\})$.
Soit $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) < g(x_0)$.

1. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, $h(x) = f(x)$.
2. En déduire que h est dérivable en x_0.

Exercice 11. Soit $a \in \mathbf{Z}$. On définit $f : \mathbf{R}^\star \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto x^a \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. À quelle condition sur a, f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. À quelle condition ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
3. Dans ce cas, la dérivée est-elle continue en 0 ?

Exercice 12. Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ deux fois dérivable telle que f'' soit continue.
Soit $(a,b) \in [0,1]^2$ tel que $a \neq b$.
Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$, on définit $\phi_{\alpha,\beta} : [0,1] \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto \alpha + \beta(x-a)$.

1. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tels que $f(a) = \phi_{\alpha,\beta}(a)$ et $f(b) = \phi_{\alpha,\beta}(b)$.
2. Montrer que si $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ est une fonction deux fois dérivables qui s'annule au moins trois fois, alors g'' s'annule au moins une fois.
3. Montrer que, pour tout $x \in [0,1] \setminus \{a,b\}$, il existe γ_x tel que $f(x) = \phi_{\alpha,\beta}(x) + \gamma_x (x-a)(x-b)$.
4. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|f(x) - (\alpha + \beta(x-a))| \ \leq\ |(x-a)(x-b)|\ \frac{1}{2} \max_{[0,1]} |f''|.$$

Exercice 13. On pose

$$A = \left\{ \frac{\cos(x) - \cos(y)}{x - y} \;\middle|\; (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x \neq y \right\}.$$

Montrer que A possède des bornes inférieure et supérieure et les déterminer.

Exercice 14.

1. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $e^x - 1 > x > 0$.
   Indication : on pourra au choix étudier les variations d'une fonction bien choisie, appliquer le théorème des accroissements finis ou écrire $e^x - 1$ comme une intégrale.
   (b) En déduire que si $x \geq 0$ vérifie $x(e^x - 1) = x^2$, alors $x = 0$.
2. On définit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in (\mathbf{R}_+^\star)^{\mathbf{N}}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{e^{u_n} - 1}$.
   (a) Montrer que (u_n) est décroissante.
   (b) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.

Exercice 15. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$x\, y'(x) \;+\; y(x) \;=\; \cos(x). \tag{1}$$

1. Résoudre (1) sur $]\,0\,, +\infty[$ puis sur $]-\infty\,, 0\,[$.
2. Résoudre (1) sur $\mathbf{R}$.

Exercice 16.

1. Montrer que l'équation (E) : $2\ln x - x + 2 = 0$ en $x \in \mathbf{R}_+^*$ admet une unique solution sur $[2, +\infty[$. On note a cette solution. Vérifier que de plus $a \in]5, 6[$.
2. Afin de déterminer une approximation de a, on introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$, où $\varphi :\ [2, +\infty[\to [2, +\infty[,\ x \mapsto 2\ln x + 2$.
   (a) i. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [5, 6]$.
       ii. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
       iii. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et que sa limite est a.
   (b) i. Montrer que, pour tout $x \in [5, 6]$, $|\varphi'(x)| \leq \dfrac{2}{5}$.
       ii. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
       $$|u_{n+1} - a| \;\leq\; \frac{2}{5}\,|u_n - a|.$$
       iii. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n - a| \leq \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.
   (c) Déterminer un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de a à 10^{-3} près.