Feuille d'exercices n° 10

Intégration : exercices théoriques (II)

Exercice 10.1. Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour $n \geq 0$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt$.

1. Montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$. En effectuant une intégration par parties, démontrer que nI_n tend vers $f(1)$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 10.2. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(0) = \ln(2)$, et pour $x \neq 0$, par

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt.$$

1. Montrer que pour tout $x \neq 0$, $F(x) = \ln(2) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1-\cos(t)}{t} dt$.
2. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout t réel, on a :
$$0 \leq 1 - \cos(t) \leq \frac{t^2}{2}.$$
En déduire que pour tout x réel, on a l'inégalité : $|F(x) - \ln 2| \leq \frac{3}{4}x^2$.
3. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (on pourra intégrer par parties).
5. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $F'(x)$ pour x non nul. Montrer que F est également dérivable en 0 et calculer $F'(0)$.

Exercice 10.3. On définit une application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{t-1}{\ln(t)} \qquad \text{pour } t \in]0,1[, f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1.$$

On définit également une application $F :]0,1[\to \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$$

1. Montrer que f est continue en tout point de $[0,1]$.
2. Pour $x \in]0,1[$, quel est le signe de $F(x)$?
3. Montrer que F est dérivable en tout point de $]0,1[$ et calculer sa dérivée.
4. a) Pour $x \in]0,1[$, montrer que $\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)} dt = \ln(2)$.
   b) Pour $x \in]0,1[$, montrer les inégalités : $x^2 \ln(2) \leq F(x) \leq x \ln(2)$.
   c) En déduire l'existence et la valeur de la limite $\lim_{x \nearrow 1} F(x)$.

   d) En déduire que $\lim_{x\searrow 0} F(x) = 0$.

5. a) Montrer que $\lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt$.

   b) Déduire de ce qui précède la valeur de $\int_0^1 f(t)dt$.

Exercice 10.4. Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(t) = \frac{t^2}{t^2+\sin^2(t)} \qquad \text{pour } t \neq 0, f(0) = \frac{1}{2}.$$

1. Montrer que f est une fonction continue. Est-elle dérivable ?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (sans présupposer son existence).
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose
$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt.$$
Montrer que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa dérivée. Montrer qu'elle est impaire.
4. Pour $x > 0$ montrer les inégalités
$$\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+1} dt \leq F(x) \leq x$$
et en déduire que
$$x - \arctan(2x) + \arctan(x) \leq F(x) \leq x.$$

Exercice 10.5. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ avec $f(1) = 0$. Montrer que l'on a :

$$\int_0^1 \big(f'(t) + \tan(t)f(t)\big)^2 dt = \int_0^1 f'(t)^2 dt - \int_0^1 f(t)^2 dt.$$

En déduire l'inégalité :

$$\int_0^1 (f(t))^2 dt \leq \int_0^1 (f'(t))^2 dt.$$

Exercice 10.6. Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes :

1) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$ 2) $u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=2}^{n-1} k^2 \sin\big(k\pi/n\big)$ 3) $u_n = \frac{1}{n}\Big(\frac{(2n)!}{n!}\Big)^{1/n}$ 4) $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{k^2+n^2}$

5) $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{k+\cos(k)}{k^2+n^2}$ 6) $u_n = \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha+\beta} + \frac{1}{n\alpha+2\beta} + \cdots + \frac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}$

avec α, β deux nombres réels strictement positifs.

Exercice 10.7. Déterminer un équivalent simple de

$$u_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k^2-k}\, e^{k/n}.$$