

Feuille d'exercices n° 5

FORMULE DE TAYLOR-LAGRANGE

Exercice 5.1. Soit $a > 0$.

1. Écrire la formule de Taylor pour la fonction cosinus, sur l'intervalle $[0; a]$, avec le reste à l'ordre 5. Montrer que l'on a :

$$\left| \cos a - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \right| \leq \frac{a^5}{5!}.$$

2. En déduire l'encadrement :

$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos \frac{1}{2} \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}.$$

Exercice 5.2.

1. Écrire la formule de Taylor pour le logarithme népérien sur l'intervalle $[1; 2]$ avec le reste à l'ordre 3. En déduire que $\frac{1}{2} < \ln 2$.
2. Écrire la formule de Taylor pour l'exponentielle sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, avec le reste à l'ordre 4. En déduire, à l'aide de la question précédente, que :

$$\frac{79}{48} < \sqrt{e} < \frac{79}{48} + \frac{1}{192}.$$

Exercice 5.3.

1. Appliquer la formule de Taylor à la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ entre 25 et 26, avec un reste à l'ordre 2.
2. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de $\sqrt{26}$.

Exercice 5.4. Soit $x \in]0; +\infty[$. Montrer l'encadrement suivant :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

Exercice 5.5.

1. Montrer que pour tout x réel tel que $0 < x < 1$, on a l'inégalité : $\ln x < 1 + x^2$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, on a les inégalités :

$$0 < (1+x)^{1/3} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} < \frac{5x^3}{81}.$$

Exercice 5.6. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 et soit M une constante positive. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a d'une part : $0 \leq \varphi(t)$ et d'autre part : $\varphi''(t) \leq M$.

1. Montrer que pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on a : $\varphi(t) + s\varphi'(t) + \frac{s^2}{2}M \geq 0$.
2. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $|\varphi'(t)| \leq \sqrt{2M}\sqrt{\varphi(t)}$.
3. Peut-on améliorer la constante dans l'inégalité précédente ?

Exercice 5.7. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On suppose en outre que f est dérivable en 0 et en 1, et que $f'(0) = f'(1) = 0$.

1. On désigne par g l'application de $]0; 1[$ dans \mathbb{R} , définie pour tout $t \in]0; 1[$ par

$$g(t) = \frac{f(t)}{t} - \frac{f(t) - 1}{t - 1}.$$

2. Montrer qu'il existe deux réels l_0 et l_1 , qu'on explicitera, tels que si on pose $g(0) = l_0$ et $g(1) = l_1$, la fonction ainsi prolongée est une fonction continue sur $[0; 1]$. En déduire qu'il existe un $a \in]0; 1[$ tel que :

$$\frac{f(a)}{a} = \frac{f(a) - 1}{a - 1},$$

puis montrer que $f(a) = a$.

3. On suppose désormais que f est deux fois dérivable sur $[0; 1]$. Soit $a \in]0; 1[$ tel que $f(a) = a$.
 - (a) On suppose ici que $a \leq \frac{1}{2}$. Écrire la formule de Taylor pour f sur l'intervalle $[0; a]$ et en déduire l'existence d'un x dans $]0; a[$ tel que $f''(x) \geq 4$.
 - (b) On suppose ici que $a > \frac{1}{2}$. Par une méthode analogue, montrer cette fois l'existence d'un y dans $]a; 1[$ tel que $f''(y) \leq -4$.
 - (c) En conclure qu'il existe $b \in]0; 1[$ tel que $|f''(b)| \geq 4$.

Exercice 5.8.

1. Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}]$. Montrer qu'il existe un unique $\theta_x \in]0; 1[$ tel que :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} \cos(\theta_x x).$$

2. En écrivant par ailleurs la formule de Taylor-Lagrange avec reste à l'ordre 5 pour \sin entre 0 et x , montrer que θ_x admet une limite quand x tend vers 0^+ et préciser cette limite.