Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2019-2020

Analyse III Durée : 2 heures

Examen final du jeudi 9 janvier 2020

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Les étudiants doivent traiter les cinq premiers exercices puis ***au choix, l'un des exercices*** *parmi les exercices 6 et 7.*
Le barème (sur .. points) est indicatif et tient compte de la longueur du sujet.

Exercice 1. ($\simeq$ 4 points) Déterminer la nature des séries de termes généraux suivants. On précisera en cas de convergence s'il y a convergence absolue ou non :

1. $t_n = \dfrac{n^2+1}{n^3+n+1}$,
2. $u_n = \dfrac{n!^2}{(2n)!}$,
3. $v_n = e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+\sqrt{2}}}$,
4. $w_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$.

Exercice 2. ($\simeq$ 5 points) Soit a un réel.

1. Montrer que si $a > 2$ alors $\ln(t + e^{(a-2)t})$ équivaut à $(a-2)t$ lorsque $t \to +\infty$. Montrer que si $a \leq 2$ alors $\ln(t + e^{(a-2)t})$ équivaut à $\ln(t)$ lorsque $t \to +\infty$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^a \ln(t + e^{(a-2)t})\,\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, $a < -1$.
3. On suppose dans ce qui suit que $a < -1$.
   (a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^a \ln(t + e^{(a-2)t})\,\mathrm{d}t$ converge.
   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^a \ln(t + e^{(a-2)t})\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 3. ($\simeq$ 5 points) On considère la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \\ x^2y^2\ln(x^2+y^2) \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

1. Justifier brièvement la continuité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Montrer que f est continue en $(0,0)$.
3. Justifier brièvement que f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ par rapport à chacune de ses variables sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.
4. Montrer que f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ par rapport à chacune de ses variables en $(0,0)$ et les calculer.
5. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. ($\simeq 1,5$ points) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Considérons la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(t^2, 3t+2)$. Justifier que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la dérivée $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 5. ($\simeq 4$ points) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{\sin(n(x-1))}{1+n^2(x-1)^2}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?
3. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[2, +\infty[$.

On rappelle que seul l'un des exercices 6 et 7 suivants est à traiter.

Exercice 6. ($\simeq 4,5$ points) On note $\mathcal{D}$ le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 - 2y \geq 0, x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}.$$

1. Représenter graphiquement $\mathcal{D}$.
2. Montrer que $\mathcal{D} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid \theta \in [0; \pi/6], 2\sin\theta \leq r \leq 1\}$.
3. Calculer l'intégrale double $I = \displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

ou

Exercice 7. ($\simeq 4,5$ points) Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+x^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Soient α un entier égal à 1 ou 2 et a un réel strictement positif. Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(t^2+a^2)^\alpha}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.
2. Sans calculer explicitement la fonction F, montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ et exprimer $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale pour tout $x > 0$.
3. Calculer explicitement une expression de la fonction F (ne dépendant plus d'une intégrale) et en déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$.