Sujet CCP du 3 mai, durée 1h30

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc.). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

Problème 1.
Dans tout le problème on pose $f(t) = e^{-t^2} \displaystyle\int_0^t e^{x^2} dx$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle
$$y' + 2ty = 1 \tag{E}$$
4. A l'aide de f, déterminer toutes les solutions de (E). Montrer que f est la seule solution de (E) telle que $y(0) = 0$, et que f est la seule solution impaire de (E).
5. Expliquer pourquoi f admet un développement limité à l'ordre n en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$, qu'on écrit sous la forme
$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + o(t^n)$$
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit aussi le développement limité de f' à l'ordre n en 0, qu'on écrit
$$f'(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k + o(t^n)$$
Justifier le fait que $b_k = (k+1)a_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
7. En utilisant le fait que f est solution de (E), établir une relation entre a_k et a_{k+2} pour tout $k \in \mathbb{N}$.
8. Donner la valeur de a_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Problème 2. Dans cet exercice, on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont deux fois dérivables et solutions de l'équation différentielle :
$$y'' + 2ty' + t^2 y = 0 \tag{H}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Étant donnée $f \in \mathcal{E}$, on définit une fonction $\tilde{f}$ en posant
$$\tilde{f}(t) = f'(t) + tf(t)\,.$$
Montrer que $\tilde{f} \in \mathcal{E}$.
On définit alors une application $U\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ en posant $U(f) = \tilde{f}$. On admet que U est linéaire.
3. Montrer que U est une symétrie, c'est-à-dire $U^2 = id$. On rappelle qu'alors on a
$$\mathcal{E} = \ker(U - \ id) \oplus \ker(U + \ id)\,.$$

4. On note $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des fonctions appartenant à $\mathcal{E}$ et solutions de l'équation différentielle

$$y' + (t-1)y = 0 \tag{H_1}$$

et $\mathcal{E}_2$ l'ensemble des fonctions appartenant à $\mathcal{E}$ et solutions de l'équation différentielle

$$y' + (t+1)y = 0 \tag{H_2}$$

Montrer, à l'aide du résultat rappelé dans la question précédente, que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$.

5. Résoudre les équations différentielles (H_1) et (H_2). En déduire toutes les solutions de (H).
6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' + 2ty' + t^2 y = t^4 + 2\,.$$