Problème du 27 avril 2016, durée 1h30.

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

Problème 1.

Dans cet exercice on considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. (a) Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.
   (b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx$ est bien définie.
   (c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la limite $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_{\pi}^{M}\frac{\sin(x)}{x}dx$ existe dans $\mathbb{R}$.
   (d) En déduire que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

   Dans la suite de cet exercice, on va chercher à déterminer la valeur de I.
2. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$. On pose, pour tout entier naturel n, $L_n = \displaystyle\int_a^b g(t)\sin(nt)\,dt$. À l'aide d'une intégration par parties bien choisie, montrer que L_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
3. On définit une fonction φ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ en posant $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
   (a) Montrer que φ est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.
   (b) Montrer que φ est continûment dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ et calculer sa dérivée.
   (c) À l'aide d'un développement limité, calculer la limite de $\varphi'(x)$ quand x tend vers 0.
   (d) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.
4. Dans cette question on fixe un entier naturel non nul n, et on définit I_n et J_n en posant
$$I_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t}\,dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,dt\ .$$
   (a) Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,dt$.
   (b) Soit $t \in]0,\frac{\pi}{2}]$. Démontrer que
$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt)\sin(t) = \frac{\sin((2n+1)t)-\sin(t)}{2}\ .$$
   Indication : On pourra commencer par écrire $\cos(2kt)\sin(t)$ *comme une différence de deux sinus.*
   (c) Calculer J_n.
5. Montrer que $I_n - J_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
6. En déduire la valeur de I.

T.S.V.P.

Problème 2.

Dans cet exercice, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n, ainsi qu'un endomorphisme f de E vérifiant $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$.

1. Montrer que n est un entier pair et déterminer le rang de f (qu'on notera p dans la suite de l'exercice) en fonction de n.
2. Montrer que $f \circ f = 0$.
3. Réciproquement, montrer que si g est un endomorphisme de E tel que $\dim(E) = 2\,\mathrm{rang}(g)$ et $g \circ g = 0$, alors $\ker(g) = \mathrm{Im}(g)$.
4. Justifier qu'il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que $\ker(f) \oplus F = E$, et que $\dim(F) = p$.
   Dans la suite on fixe un tel F ainsi qu'une base $e_1, \ldots, e_p$ de F.
5. Montrer que $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
6. Pour tout i compris entre 1 et p, on pose $e_{p+i} = f(e_i)$.
   Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_{2p})$ est une base de E.

(bonus) Écrire la matrice de f dans la base obtenue à la question précédente.