Problème du 27 avril 2016, durée 1h30.

Problème 1.

Dans cet exercice on considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. (a) *Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.*
La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues (la fonction au dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$). De plus, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ et f est continue en 0. Ainsi, f est continue sur $[0,+\infty[$.

(b) *Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx$ est bien définie.*

La fonction f étant continue sur le segment $[0,\pi]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx$ est bien définie.

(c) *À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la limite $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_\pi^M \frac{\sin(x)}{x}dx$ existe dans $\mathbb{R}$.*
Soit $M > \pi$. Les fonctions $u : [\pi, M] \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\cos x$ et $v : [\pi, M] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $x \in [\pi, M]$, $u'(x) = \sin x$, $v'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}\int_\pi^M \frac{\sin(x)}{x}dx &= \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_\pi^M - \int_\pi^M \frac{\cos(x)}{x^2}dx \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{\cos M}{M} - \int_\pi^M \frac{\cos(x)}{x^2}dx.\end{aligned}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\cos x| \leq 1$ donc pour tout $M \geq \pi$, $\left|\frac{\cos M}{M}\right| \leq \frac{1}{M}$. Comme $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{M} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\frac{\cos M}{M} = 0$.
De plus, pour tout $x \geq \pi$, $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$ et $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ est convergente donc $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ est également convergente.
Ainsi, la limite quand $M \to +\infty$ de $\displaystyle\int_\pi^M \frac{\sin(x)}{x}dx$ existe dans $\mathbb{R}$.

(d) *En déduire que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.*

On a montré que $\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx$ est bien définie et que $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_\pi^M\frac{\sin(x)}{x}dx$ existe dans $\mathbb{R}$, on en déduit que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

2. *Soit g une fonction de classe C^1 sur un segment $[a,b]$. On pose, pour tout entier naturel n, $L_n = \displaystyle\int_a^b g(t)\sin(nt)\,dt$. À l'aide d'une intégration par parties bien choisie, montrer que L_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions g et $v : [a,b] \to \mathbb{R},\ t \mapsto -\frac{\cos(nt)}{n}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} L_n &= \left[g(t) \times \frac{-\cos(nt)}{n}\right]_a^b + \int_a^b g'(t)\frac{\cos(nt)}{n}dt \\ &= -\frac{\cos(nb)}{n}g(b) + \frac{\cos(na)}{n}g(a) + \frac{1}{n}\int_a^b g'(t)\cos(nt)dt, \end{aligned}$$

d'où

$$|L_n| \leq \left|\frac{\cos(nb)}{n}g(b)\right| + \left|\frac{\cos(na)}{n}g(a)\right| + \frac{1}{n}\int_a^b |g'(t)\cos(nt)|dt.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\cos x| \leq 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|L_n| \leq \frac{1}{n}\left(|g(a)| + |g(b)| + \int_a^b |g'(t)|dt\right).$$

L'intégrale $\int_a^b |g'(t)|dt$ est un réel fixé ($|g'|$ est continue), de même que $g(a)$ et $g(b)$, on en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 0$.

3. On définit une fonction φ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ en posant $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

   (a) *Montrer que φ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.*
   La fonction φ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par théorème d'opérations. De plus pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi(x) = \dfrac{\sin x - x}{x \sin x}$ et $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ donc

   $$\sin x - x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{6} \quad \text{et} \quad x \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x^2,$$

   d'où $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x}{6}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 0 = \varphi(0)$. Ainsi φ est continue en 0 et sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

   (b) *Montrer que φ est continûment dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et calculer sa dérivée.*
   La fonction φ est continûment dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par théorème d'opérations. De plus pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$,

   $$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{(\sin x)^2} = \frac{-(\sin x)^2 + x^2 \cos x}{(x \sin x)^2}.$$

   (c) *À l'aide d'un développement limité, calculer la limite de $\varphi'(x)$ quand x tend vers 0.*
   On écrit un développement limité à l'ordre 4 du numérateur de φ' au voisinage de 0 :

   $$\begin{aligned} -(\sin x)^2 + x^2 \cos x &= -\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)^2 + x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\ &= -x^2 + \frac{x^4}{3} + x^2 - \frac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\ &= -\frac{x^4}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4). \end{aligned}$$

   Ainsi, $\varphi'(x) \sim_{x\to 0} \frac{-x^4/6}{x^4} = -\frac{1}{6}$, et donc $\lim_{x\to 0} \varphi'(x) = -\frac{1}{6}$.

(d) *Montrer que φ est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.*

On a montré les propriétés suivantes :
- φ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$,
- φ est de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$,
- $\varphi'(x)$ admet une limite finie quand $x \to 0$, égale à $-1/6$.

On en déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et que $\varphi'(0) = -1/6$.

4. Dans cette question on fixe un entier naturel non nul n, et on définit I_n et J_n en posant

$$I_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t}\, dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\, dt \; .$$

(a) *Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\, dt$.*

On fait le changement de variable (linéaire) suivant : $u = \frac{t}{2n+1}$. Alors $dt = (2n+1)du$ et on a

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)u)}{(2n+1)u}(2n+1)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)u)}{u}\, du$$

ce qui est bien le résultat demandé, la variable d'intégration étant muette.

(b) *Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Démontrer que*

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt)\sin(t) = \frac{\sin((2n+1)t) - \sin(t)}{2} \; .$$

Indication : On pourra commencer par écrire $\cos(2kt)\sin(t)$ comme une différence de deux sinus.

En utilisant la formule suivante : $\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$, on écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt)\sin(t) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(\sin((2k+1)t) - \sin((2k-1)t)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin((2k+1)t) - \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1}\sin((2l+1)t)\\
&= \frac{1}{2}(\sin((2n+1)t) - \sin t).
\end{aligned}$$

(c) *Calculer J_n.*

En utilisant le résultat précédent, on écrit pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt),$$

et cette formule est encore valide pour $t = 0$, les deux membres valant $2n+1$ en $t = 0$. On a donc

$$\begin{aligned}
J_n &= \int_0^{\pi/2} dt + 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi/2}\cos(2kt)dt\\
&= \frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin(2kt)}{2k}\right]_0^{\pi/2}\\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

5. *Montrer que $I_n - J_n$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.*
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$I_n - J_n = \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)t) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} \right) dt = \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)t) \varphi(t)\, dt.$$
   La fonction φ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, on peut appliquer le résultat de la question 2. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n - J_n = 0$.
6. *En déduire la valeur de I.*
   Par définition de I, on a $I = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n$, donc $I = \lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Problème 2.

Dans cet exercice, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n, ainsi qu'un endomorphisme f de E vérifiant $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$.

1. *Montrer que n est un entier pair et déterminer le rang de f (qu'on notera p dans la suite de l'exercice) en fonction de n.*
   Par le théorème du rang, on a $n = \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2p$, donc n est pair, et $p = n/2$.
2. *Montrer que $f \circ f = 0$.*
   Soit $x \in E$. Alors par définition de $\mathrm{Im}(f)$, $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$. Comme $\mathrm{Im}(f) = \ker(f)$, on a donc $f(f(x)) = 0$. Ainsi $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
3. *Réciproquement, montrer que si g est un endomorphisme de E tel que $\dim(E) = 2\,\mathrm{rang}(g)$ et $g \circ g = 0$, alors $\ker(g) = \mathrm{Im}(g)$.*
   Soit g un endomorphisme de E tel que $\dim(E) = 2\,\mathrm{rang}(g)$ et $g \circ g = 0$.
   Montrons d'abord que $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(g)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. On a donc $g(y) = g(g(x)) = 0$, c'est-à-dire $y \in \ker(g)$. On a bien montré $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(g)$.
   De plus, par le théorème du rang, $\dim(\ker(g)) = \dim E - \mathrm{rang}(g) = \mathrm{rang}(g)$. On en déduit donc l'égalité $\mathrm{Im}(g) = \ker(g)$.
4. *Justifier qu'il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que $\ker(f) \oplus F = E$, et que $\dim(F) = p$.*
   $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E, il admet donc un supplémentaire F dans E, et on a $\dim F = \dim E - \dim(\ker(f)) = 2p - p = p$.
   Dans la suite on fixe un tel F ainsi qu'une base $e_1, \dots, e_p$ de F.
5. *Montrer que $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.*
   Le cardinal de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ étant égal à la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, il suffit pour montrer que cette famille est une base de $\mathrm{Im}(f)$ de montrer qu'elle est génératrice.
   Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Par la décomposition $E = \ker(f) \oplus F$, il existe $x_0 \in \ker(f)$, $z \in F$ tels que $x = x_0 + z$, et comme $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $z = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$. Alors par linéarité de f,
$$y = f(x_0) + \sum_{i=1}^p \lambda_i f(e_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(e_i).$$
   La famille $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est bien une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

6. *Pour tout i compris entre 1 et p, on pose $e_{p+i} = f(e_i)$.*
Montrer que la famille $(e_1, \dots, e_{2p})$ est une base de E.

Le cardinal de la famille $(e_1, \dots, e_{2p})$ étant égal à la dimension de E, il suffit pour montrer que cette famille est une base de E de montrer qu'elle est libre.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2p}) \in \mathbb{R}^{2p}$ tel que $\sum_{i=1}^{2p} \lambda_i e_i = 0$. Alors en appliquant f, comme $f(0) = 0$, on a

$$\begin{aligned} 0 = f\left(\sum_{i=1}^{2p} \lambda_i e_i\right) &= \sum_{i=1}^{2p} \lambda_i f(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(e_i) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_{i+p} f(f(e_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(e_i) \quad \text{car } f \circ f = 0. \end{aligned}$$

Or, $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est libre donc $\lambda_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, p$. On a donc $\sum_{i=p+1}^{2p} \lambda_i e_i = 0$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{p} \lambda_{p+i} f(e_i) = 0$. On utilise encore le fait que $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est libre pour en déduire que $\lambda_i = 0$ pour tout $i = p+1, \dots, 2p$.

(bonus) *Ecrire la matrice de f dans la base obtenue à la question précédente.*

Pour tout $i = 1, \dots, p$, $f(e_i) = e_{p+i}$ et $f(e_{p+i}) = f(f(e_i)) = 0$ donc la matrice de f dans la base $(e_1, \dots, e_{2p})$ est

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{array}\right)$$

où chaque bloc est de taille $p \times p$.