2015-2016 **Semestre de printemps**
Université Lyon I **PMI/CCP**

Problème du 30 mars 2016.

Problème 1.

1. *Préliminaire 1.* On note $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que : $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
      i. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda\rho^n + \mu(-\rho)^{-n}$.
      ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \lambda\rho^n - |\mu|$.
   (b) Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que : $s_0 < 1$, $s_1 < 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $s_{n+2} = s_{n+1}s_n$.
      i. On suppose $s_0 = 0$ ou $s_1 = 0$. Donner la valeur de s_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
      ii. On suppose maintenant $s_0 > 0$ et $s_1 > 0$. Montrer qu'il existe $C > 0$ et $\lambda > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq Ce^{-\lambda\rho^n}$.
      Indication. On utilisera la suite $u_n = -\ln s_n$.
   (c) Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que : $r_0 < 1$, $r_1 < 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $r_{n+2} \leq r_{n+1}r_n$.
      i. En utilisant la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $s_0 = r_0$, $s_1 = r_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $s_{n+2} = s_{n+1}s_n$, montrer qu'il existe $C > 0$ et $\lambda > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n \leq Ce^{-\lambda\rho^n}$.
      ii. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$.

2. *Préliminaire 2 : différences divisées.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f''(x)| \leq M$.
   On pose pour tous réels x_1, x_2, x_3 deux à deux distincts
   $$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2},$$
   $$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_2, x_3]}{x_1 - x_3}.$$
   (a) Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$. Montrer qu'il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f[x_1, x_2] = f'(c)$.
   (b) Soit x_1, x_2 et x_3 trois réels tels que $x_1 < x_2 < x_3$. Montrer qu'il existe $y \in]x_1, x_2[$ et $z \in]x_2, x_3[$ tels que
   $$f[x_1, x_2] = f'(x_2) + \frac{f''(y)}{2}(x_1 - x_2) \quad \text{et} \quad f[x_2, x_3] = f'(x_2) - \frac{f''(z)}{2}(x_2 - x_3).$$
   En déduire que
   $$|f[x_1, x_2, x_3]| \leq \frac{M}{2}.$$
   On admettra que cette majoration est valide pour tous réels x_1, x_2, x_3.

3. *Méthode de la sécante.* Soit a, b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = 0$. On suppose de plus que f' ne s'annule pas sur $[a, b]$. On note $m = \min_{y\in[a,b]} |f'(y)|$ et $M = \max_{y\in[a,b]} |f''(y)|$. On a : m et M finis et $m > 0$.

La méthode de la sécante est un algorithme permettant le calcul d'une valeur approchée de la solution x à $f(x) = 0$. Pour cela, on construit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme suit :

$$y_0, y_1 \in [a,b], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f[y_{n-1}, y_n]}. \tag{1}$$

Dans toute la suite, on supposera que la suite $(y_n)_n$ est bien définie, à valeurs dans $[a,b]$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} y_{n+1} - x &= (y_n - x)\left(1 - \frac{f[y_n, x]}{f[y_{n-1}, y_n]}\right) \\ &= (y_n - x)(y_{n-1} - x)\frac{f[y_{n-1}, y_n, x]}{f[y_{n-1}, y_n]} \end{aligned}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $r_n = \frac{M}{2m}|y_n - x|$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$r_{n+1} \leq r_n r_{n-1}.$$

(c) En déduire qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $|y_0 - x| < \eta$ et $|y_1 - x| < \eta$, alors la suite $(y_n)_n$ converge vers x.