**Correction du sujet CCP du 15 mars 2017**

**Exercice 1.**

1. Supposons $f = \alpha\mathrm{id}$. La relation $f^2 = \frac{1}{2}(f+\mathrm{id})$ donne $\alpha^2\mathrm{id} = \frac{1}{2}(\alpha\mathrm{id}+\mathrm{id})$ d'où $(2\alpha^2-\alpha-1)\mathrm{id} = 0$ puis $2\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$. Par suite $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1/2$. Inversement si $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1/2$ alors $f = \alpha\mathrm{id}$.
2. (a) $f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{id})$ donne $f \circ (2f - \mathrm{id}) = (2f - \mathrm{id}) \circ f = \mathrm{id}$. Par suite $f$ est inversible et $f^{-1} = 2f - \mathrm{id}$.

   (b) $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id})$ sont les noyaux des applications linéaires $(f - \mathrm{id})$ et $f + \frac{1}{2}\mathrm{id}$. Ce sont donc des sous-espaces vectoriels de $E$.

   (c) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id})$. On a $f(x) = x$ et $f(x) = -\frac{1}{2}x$ donc $x = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(f+\frac{1}{2}\mathrm{id})$ sont en somme directe. Montrons $E = \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})+\mathrm{Ker}(f+\frac{1}{2}\mathrm{id})$. Soit $x \in E$, si $x = u+v$ avec $u \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$ et $v \in \mathrm{Ker}(f+\frac{1}{2}\mathrm{id})$, on a $f(x) = f(u)+f(v) = u - \frac{1}{2}v$ et on en déduit que $v = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}f(x)$ et $u = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}f(x)$. Du coup pour $x \in E$ quelconque on pose $u = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}f(x)$ et $v = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}f(x)$, on a bien $x = u+v$ et on vérifie que $f(u) = \frac{1}{3}f(x) + \frac{2}{3}f^2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}f(x) = u$ donc $u \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$ et $f(v) = \frac{2}{3}f(x) - \frac{2}{3}f^2(x) = \frac{1}{3}f(x) - \frac{1}{3}x = -\frac{1}{2}v$ donc $v \in \mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id})$. Finalement $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id})$.

   (d) $(f+\frac{1}{2}\mathrm{id})\circ(f-\mathrm{id}) = f^2+\frac{1}{2}f - f - \frac{1}{2}\mathrm{id} = f^2 - \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{id} = 0$. Puisque $(f+\frac{1}{2}\mathrm{id})\circ(f-\mathrm{id}) = 0$ on a $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id})$. Mais $\dim(\mathrm{Im}(f - \mathrm{id})) = \dim E - \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}))$ et $E = \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id})$ donne $\dim(\mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id})) = \dim E - \dim(\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}))$ d'où $\dim(\mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id})) = \dim(\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}))$ et par inclusion et égalité des dimensions $\mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$.

   (e) Comme ci-dessus $(f - \mathrm{id}) \circ (f + \frac{1}{2}\mathrm{id}) = 0$ donc $\mathrm{Im}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ puis par égalité des dimensions on obtient $\mathrm{Im}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.
3. (a) On a $f^3 = f \circ f^2 = f \circ \frac{1}{2}(f + \mathrm{id}) = \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}f = \frac{3}{4}f + \frac{1}{4}\mathrm{id}$.

   (b) Unicité : supposons $f^n = a_nf+b_n\mathrm{id}$ et $f^n = \alpha_nf+\beta_n\mathrm{id}$. On a alors $(a_n-\alpha_n)f+(b_n-\beta_n)\mathrm{id} = 0$ or $f$ n'est pas un multiple de id d'où $\alpha_n = a_n$ et $\beta_n = b_n$.

   Existence : Pour $n = 0$ : $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ conviennent. Pour $n = 1$ : $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ conviennent. Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$. Alors

   $$f^{n+1} = f \circ f^n = f \circ (a_nf + b_n\mathrm{id}) = a_nf^2 + b_nf = (\frac{a_n}{2} + b_n)f + \frac{a_n}{2}\mathrm{id} = a_{n+1}f + b_{n+1}\mathrm{id}$$

   avec $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + b_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n}{2}$. La récurrence est donc établie.

   (c) On a $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{2} + b_{n+1} = \frac{a_{n+1}+a_n}{2}$, donc $(a_n)$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$. Les racines de ce polynôme sont 1 et $-\frac{1}{2}$. Par suite il existe $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \lambda + \nu(\frac{-1}{2})^n$. En remplaçant par $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ on trouve $\lambda = \frac{2}{3}$ et $\nu = -\frac{2}{3}$. Finalement,

   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(\frac{-1}{2})^n, \text{ et } b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(\frac{-1}{2})^n.$$

   Puisque $|-1/2| < 1$, on a $a_n \to \frac{2}{3}$ et $b_n \to \frac{1}{3}$.

   (d) On calcule $p^2 = \frac{4}{9}f^2 + \frac{4}{9}f + \frac{1}{9}\mathrm{id} = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\mathrm{id} = p$ donc $p$ est une projection vectorielle. D'autre part, $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(\frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\mathrm{id}) = \mathrm{Im}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(\frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$. Finalement $p$ est la projection vectorielle sur $\mathrm{Im}p = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}p = \mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$.

4. Soit $h = \lambda_1 f + \nu_1 \mathrm{id}$ et $g = \lambda_2 f + \nu_2 \mathrm{id}$ des éléments de $\mathcal{M}$. On calcule

$$\begin{aligned} h \circ g &= (\lambda_1 f + \nu_1 \mathrm{id}) \circ (\lambda_2 f + \nu_2 \mathrm{id}) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 f^2 + (\lambda_1 \nu_2 + \lambda_2 \nu_1) f + \nu_1 \nu_2 \mathrm{id} \\ &= (\lambda_1 \nu_2 + \lambda_2 \nu_1 + \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2) f + (\nu_1 \nu_2 + \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2) \mathrm{id} \end{aligned}$$

donc $h \circ g \in \mathcal{M}$. De même on calcule $g \circ h$ et on vérifie facilement que $h \circ g = g \circ h$.

**Exercice 2.**

1. On a $\deg(P'') < \deg(P)$, et les racines de $P$ sont $x_1, \ldots, x_n$, qui sont racines simples, d'où l'expression

$$\frac{P''}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{X - x_i}$$

Le calcul de $\alpha_i$ a été vu en TD : on obtient $\alpha_i = \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)}$ en calculant la limite de $(X - x_i) \dfrac{P''(x_i)}{P(x_i)}$ ; notons qu'on sait que $P'(x_i) \neq 0$ puisque $x_i$ est racine simple de $P$.

2. $\dfrac{xP''(x)}{P(x)} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$ car $\deg XP'' < \deg P$ et d'autre part $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_i x}{x - x_i} \to \sum_{k=1}^{n} \alpha_i$ donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$$

**Exercice 3.**

1. Puisque $(u_n)$ est croissante on a $u_k \leq u_n$ pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. De plus, pour $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{n u_{n+1} - (u_1 + \cdots + u_n)}{n(n+1)} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n} (u_{n+1} - u_k)}{n(n+1)} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

donc $(v_n)$ est croissante. Ensuite, comme $(u_n)$ est croissante et converge vers $\ell$ on sait que $u_n \leq \ell$ pour tout $n$ ; par conséquent, pour tout $n \geq 1$ on a $v_n \leq \dfrac{\ell + \cdots + \ell}{n} \leq \dfrac{n\ell}{\ell} = \ell$.

2. $v_{2n} = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{2n} + \dfrac{u_{n+1} + \cdots + u_{2n}}{2n} \geq \dfrac{v_n}{2} + \dfrac{u_n}{2}$.

3. On a $v_n \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $(v_n)$ croissante donc converge vers un réel $\ell' \leq \ell$. La relation de la question (2), passée à la limite, donne $2\ell' \geq \ell + \ell'$ ce qui permet de conclure $v_n \to \ell$.