
Sujet CCP du 15 mars 2017

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E et id l'application identité. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant la relation

$$f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{id})$$

(on rappelle que $f^2 = f \circ f$ et de façon plus générale f^n est la composée de f avec lui-même n fois).

1. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ peut-on avoir $f = \alpha\,\mathrm{id}$?
2. On revient au cas général.
   (a) Prouver que l'application f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} en fonction de f et de id.
   (b) Justifier que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (c) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}) = E$.
   (d) Calculer $(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}) \circ (f - \mathrm{id})$. En déduire que $\mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$.
   (e) De même, justifier que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Im}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id})$.
3. On suppose désormais qu'il n'existe pas α tel que $f = \alpha\,\mathrm{id}$.
   (a) Montrer que $f^3 = \frac{3}{4}f + \frac{1}{4}\mathrm{id}$.
   (b) Établir que, pour tout entier naturel n, il existe un couple (a_n, b_n) de réels et un seul tel que $f^n = a_n f + b_n \mathrm{id}$. Déterminer a_0, b_0, a_1, b_1 et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Former une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n.
   En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.
   Vérifier que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{3}$.
   (d) On convient d'appeler limite de $f^n = a_n f + b_n \mathrm{id}$ l'endomorphisme $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\mathrm{id}$. Justifier que p est la projection vectorielle sur $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$.
4. On définit $\mathcal{M} = \{\lambda f + \mu \mathrm{id} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que pour tout $h, g \in \mathcal{M}$ on a $h \circ g \in \mathcal{M}$ et $h \circ g = g \circ h$.

Exercice 2. Soit $n > 1$ un entier et $P(X) = (X - x_1)\cdots(X - x_n)$ où $x_1, \ldots, x_n$ sont des nombres réels distincts.

1. Donner la décomposition en éléments simples de P''/P.
2. Étudier la limite de $\frac{XP}{P''}$ lorsque $X \to +\infty$ et en déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$$

Exercice 3. Soit (u_n) une suite croissante de limite ℓ. On pose

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$$

1. Montrer que (v_n) est croissante et majorée par ℓ.
2. Établir que $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$.
3. En déduire que $v_n \to \ell$.