Problème du 09 mars 2016, durée 1h30.

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

Partie I.
On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \ .$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Tchebychev.

1. Expliciter T_2 et T_3.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré de T_n et son coefficient dominant.
3. Étudier la parité de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on a $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in [-1, 1]$, $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. En utilisant cette expression de T_n, donner une expression de $T_n'(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
6. Montrer que l'on a pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$. En déduire que $\arccos(x) \underset{x\to1^-}{\sim} \sqrt{1-x^2}$.
7. Calculer $T_n'(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer les racines de T_n appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$.
9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner toutes les racines de T_n et étudier leur multiplicité.

Partie II.
L'objectif de cette partie est de calculer la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X(X-1)}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ pour $n \geq 2$, puis la majoration suivante : pour tout $n \geq 1$, $S_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.
2. Prouver que la suite $(S_n)_{n\geq1}$ converge. On note l sa limite.
3. On introduit pour tout $n \geq 1$, $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$.
   (a) Trouver une relation exprimant S_{2n} en fonction de S_n et U_n.
   (b) En déduire que U_n converge et exprimer sa limite l' en fonction de l.

   Nous allons maintenant poursuivre l'étude en calculant l' à l'aide des polynômes de Tchebychev.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ on note $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$.

   (a) Etablir l'égalité $\dfrac{T_n'}{T_n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(X - x_k)}$.

   (b) En déduire que

   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)} = n^2 \ .$$

   (c) A l'aide du résultat de la question précédente, calculer

   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} \ .$$

5. Prouver que, pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.
6. En déduire un encadrement de U_n, puis les valeurs de l' et l.