Correction du sujet CCP du 1er février 2017.

Problème 1. On considère les matrices

$$J = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \ , \ K = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ , \ L = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Dans ce problème, pour $t \in \mathbb{R}$ on note $M(t) = J + tK + t^2L$.

1. *Pour $t \in \mathbb{R}$ donner les coefficients de $M(t)$. Montrer que $M(1) = I_3$.*
   La définition nous donne immédiatement

$$M(t) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+3t+2t^2 & 4-4t^2 & 1-3t+2t^2 \\ 1-t^2 & 4+2t^2 & 1-t^2 \\ 1-3t+2t^2 & 4-4t^2 & 1+3t+2t^2 \end{pmatrix} \ .$$

   Substituer $t = 1$ nous donne

$$M(1) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \ .$$

2. *Montrer que $J^2 = J$ et $JK = KJ = 0$. Dans la suite on admettra qu'on a aussi $K^2 = K, L^2 = L$, et $LK = KL = JL = LJ = 0$.*
   Il suffit d'écrire le produit de matrices pour obtenir

$$J^2 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 1+4+1 & 4+16+4 & 1+4+1 \\ 1+4+1 & 4+16+4 & 1+4+1 \\ 1+4+1 & 4+16+4 & 1+4+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 6 & 24 & 6 \\ 6 & 24 & 6 \\ 6 & 24 & 6 \end{pmatrix} = J \ .$$

   De même, le calcul donne

$$JK = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 3-3 & 0 & -3+3 \\ 3-3 & 0 & -3+3 \\ 3-3 & 0 & -3+3 \end{pmatrix} = 0 \ ;$$

$$KJ = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 3-3 & 12-12 & 3-3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3+3 & -12+12 & -3+3 \end{pmatrix} = 0 \ .$$

3. *Montrer que, pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ on a $M(t)M(s) = M(ts)$.*
   Soit $t, s \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} M(t)M(s) &= (J + tK + t^2L)(J + sK + s^2L) \\ &= J^2 + sJK + s^2JL + tKJ + tsK^2 + ts^2KL + t^2LJ + t^2sLK + t^2s^2L^2 \\ &= J + tsK + t^2s^2L \\ &= M(ts) \ . \end{aligned}$$

   (Pour obtenir l'avant-dernière ligne ci-dessus, on a utilisé $J^2 = J$,$K^2 = K$, $L^2 = L$, $JK = KJ = LK = KL = JL = LJ = 0$)

4. *Déterminer tous les réels t tels que $M(t)$ est inversible, et préciser alors $M(t)^{-1}$.*
   Si $t \neq 0$, on a d'après le résultat de la question précédente que

$$M(t)M(\frac{1}{t}) = M(1) = I_3 \quad \text{et } M(\frac{1}{t})M(t) = M(1) = I_3 \ .$$

   Donc $M(t)$ est inversible dès que $t \neq 0$, et $M(t)^{-1} = M(\frac{1}{t})$ (remarquons qu'on a vu en cours que vérifier une seule des égalités ci-dessus suffit pour établir l'inversibilité de $M(t)$ et la valeur de $M(t)^{-1}$ puisque c'est une matrice carrée).
   Reste à traiter le cas où $t = 0$, et on a $M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En remplaçant L_2 par $L_2 - L_1$ et L_3 par $L_3 - L_1$ on voit que la forme échelonnée réduite de $M(0)$ est égale à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: $M(0)$ n'est pas inversible.

5. *Montrer que $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible (on n'essaiera pas de calculer P^{-1}) et que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a l'égalité*

$$M(t)P = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix} \ .$$

   On peut par exemple appliquer l'algorithme de Gauss pour mettre P sous forme échelonnée : remplacer L_2 par $L_2 - L_1$ et L_3 par $L_3 - L_1$ nous amène à

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Permuter L_2 et L_3 puis remplacer L_3 par $2L_3 - L_2$ nous amène à

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

   On voit donc qu'il y a trois positions de pivot, par conséquent la matrice P est inversible (pas la peine d'aller plus loin dans le calcul de la forme échelonnée réduite : on sait déjà qu'elle sera égale à I_3 !).
   Il nous reste à calculer deux produits de matrices, pour $t \in \mathbb{R}$ fixé :

$$\begin{aligned} M(t)P &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1+3t+2t^2+4-4t^2+1-3t+2t^2 & -(1+3t+2t^2)+(1-3t+2t^2) & 2(1+3t+2t^2)-(4-4t^2)+2(1-3t+2t^2) \\ 1-t^2+4+2t^2+1-t^2 & -(1-t^2)+(1-t^2) & 2(1-t^2)-(4+2t^2)+2(1-t^2) \\ 1-3t+2t^2+4-4t^2+1+3t+2t^2 & -(1-3t+2t^2)+(1+3t+2t^2) & 2(1-3t+2t^2)-(4-4t^2)+2(1+3t+2t^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -t & 2t^2 \\ 1 & 0 & -t^2 \\ 1 & t & 2t^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Et

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -t & 2t^2 \\ 1 & 0 & -t^2 \\ 1 & t & 2t^2 \end{pmatrix}$$

   On a donc bien $M(t)P = PD(t)$, où $D(t)$ désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix}$.

6. *Calculer $P^{-1}M(t)P$ pour $t \in \mathbb{R}$ et en déduire une nouvelle preuve du fait que $M(s)M(t) = M(st)$ pour tout $s, t \in \mathbb{R}$.*
   En multipliant à droite par P^{-1} dans l'égalité obtenue à la question ci-dessus (ce qui est possible puisqu'on a vérifié que P est inversible) on obtient que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $M(t) = PD(t)P^{-1}$.
   Soit $s, t \in \mathbb{R}$; un calcul immédiat montre que $D(t)D(s) = D(ts)$. Et on a

$$\begin{aligned} M(t)M(s) &= (PD(t)P^{-1})(PD(s)P^{-1}) \\ &= PD(t)(P^{-1}P)D(s)P^{-1} \\ &= P(D(t)D(s))P^{-1} \\ &= PD(ts)P^{-1} \\ &= M(ts) \ . \end{aligned}$$

Problème 2. Dans tout ce problème, a désigne un réel différent de 1. On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

où P est un polynôme.
On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé par les suites réelles. Un élément de E est noté indifféremment $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou u. On fixe un entier naturel p et on définit

$$E_a^{(p)} = \{u \in E \colon \exists P \in \mathbb{R}_p[X] \ \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = au_n + P(n)\}$$

1. *Montrer que $E_a^{(p)}$ est un sous-espace vectoriel de E.*
   D'abord, la suite nulle est dans $E_a^{(p)}$ (avec $P = 0$). Ensuite, soit $(u, v) \in \left(E_a^{(p)}\right)^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe deux polynômes P et Q dans $\mathbb{R}_p[X]$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = au_n + P(n), \quad v_{n+1} = av_n + Q(n).$$

   Notons $w = \lambda u + v$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \lambda u_{n+1} + v_{n+1} \\ &= \lambda(au_n + P(n)) + (av_n + Q(n)) \\ &= a(\lambda u_n + v_n) + (\lambda P(n) + Q(n)) \\ &= aw_n + (\lambda P(n) + Q(n)). \end{aligned}$$

   Comme $\lambda P + Q$ est un polynôme de dégré inférieur ou égal à p, $w \in E_a^{(p)}$.
   On en déduit que $E_a^{(p)}$ est est un sous-espace vectoriel de E.

2. *Soit $u \in E_a^{(p)}$. Par définition, il existe un polynôme P tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + P(n)$. Montrer qu'un tel polynôme est unique. Dans la suite, on note $P = P_u$.*
   Soit $u \in E_a^{(p)}$. Supposons qu'il existe deux polynômes P et Q tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + P(n) = au_n + Q(n)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = Q(n)$. Le polynôme $P - Q$ a donc une infinité de racines (tous les entiers naturels), on en déduit que $P - Q$ est le polynôme nul, *i.e.* $P = Q$. D'où l'unicité du polynôme tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + P(n)$.

3. *On définit une suite y en posant $y(n) = a^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les éléments de $E_a^{(p)}$ pour lesquels $P_u = 0$ sont exactement les multiples de y.*
   Soit $u \in E_a^{(p)}$ tel que $P_u = 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n$, donc (u_n) est une suite géométrique de raison a, d'où $u_n = u_0 a^n$. Ce qui signifie $u = u_0\, y$.

4. *On considère maintenant*

$$F_a^{(p)} = \{u \in E_a^{(p)} \colon u_0 = 0\} \ .$$

   On admet que c'est un sous-espace vectoriel de $E_a^{(p)}$. Montrer que, pour $u, v \in F_a^{(p)}$, on a $P_u = P_v$ si et seulement si $u = v$.

Soit $u, v \in F_a^{(p)}$. Supposons que $P_u = P_v$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n = v_n$ pour tout n : pour $n = 0$, on a $u_0 = 0 = v_0$. Ensuite, soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n = v_n$. Alors

$$u_{n+1} = au_n + P_u(n) = av_n + P_v(n) = v_{n+1}.$$

Par récurrence, on conclut que si $u, v \in F_a^{(p)}$ sont tels que $P_u = P_v$ alors $u = v$. Réciproquement, si $u = v$ on a bien sûr $P_u = P_v$.

5. *Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_p[X]$ il existe un unique $u \in F_a^{(p)}$ tel que $P = P_u$.*
Soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$. On définit $u \in E$ par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n) \end{cases}.$$

Alors il est immédiat que $u \in F_a^{(p)}$ avec $P = P_u$. Une telle suite u est unique par le résultat de la question (4).

6. *(*Question difficile) Montrer que $F_a^{(p)}$ est de dimension $p+1$.*
Pour cela, on construit une base de $F_a^{(p)}$ en utilisant une base de $\mathbb{R}_p[X]$ et la question précédente. Pour tout $k \in \{0, \ldots, p\}$, on note $v^{(k)}$ l'élément de $F_a^{(p)}$ tel que $P_{v^{(k)}} = X^k$, *i.e.*

$$\begin{cases} v_0^{(k)} = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1}^{(k)} = av_n^{(k)} + n^k \end{cases}.$$

Montrons que $(v^{(0)}, \ldots, v^{(p)})$ est une base de $F_a^{(p)}$, ce qui montrera bien que $F_a^{(p)}$ est de dimension $p+1$.

Cette famille est génératrice : si $u \in F_a^{(p)}$, alors P_u s'écrit $P_u = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k X^k$, et on montre par récurrence que $u = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k v^{(k)}$.

De plus, cette famille est libre : s'il existe des réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_p$ tels que $\sum_{k=0}^{p} \alpha_k v^{(k)} = 0$, alors $u = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k v^{(k)}$ est un élément de $F_a^{(p)}$ associé au polynôme $P_u = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k X^k$ (par le calcul mené à la question 1), et aussi au polynôme nul, puisque $u = 0$. Par unicité, $\sum_{k=0}^{p} \alpha_k X^k = 0$ et donc, $(1, X, \ldots, X^p)$ étant une base de $\mathbb{R}_p[X]$, $\alpha_k = 0$ pour tout $k = 0, \ldots, p$.

7. *Montrer que*

$$E_a^{(p)} = F_a^{(p)} \oplus Vect(y)\ .$$

Indication. Utiliser $v \in F_a^{(p)}$ tel que $P_v = P_u$ et considérer $u - v$.
Soit $u \in E_a^{(p)}$. Par la question 5, il existe $v \in F_a^{(p)}$ tel que $P_v = P_u$. Alors, $u - v \in E_a^{(p)}$ avec $P_{u-v} = P_u - P_v = 0$ donc par la question 3, $u - v = (u_0 - v_0)y = u_0 y$. Ainsi, $u = v + u_0 y$. On vient de montrer que $E_a^{(p)} = F_a^{(p)} + \mathrm{Vect}(y)$.
Montrons que $F_a^{(p)} \bigcap \mathrm{Vect}(y) = \{0\}$. Soit $u \in F_a^{(p)} \bigcap \mathrm{Vect}(y)$. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u = \alpha y$, et $u_0 = 0$. Or $\alpha = u_0$ donc on en déduit que u est la suite nulle.
Ainsi, $E_a^{(p)} = F_a^{(p)} \oplus \mathrm{Vect}(y)$.

8. *Donner la dimension de $E_a^{(p)}$.*
On a donc $\dim E_a^{(p)} = \dim F_a^{(p)} + \dim \mathrm{Vect}(y) = p + 1 + 1 = p + 2$.

9. On définit, pour $k \in \{0, \ldots, p\}$, une suite $x^{(k)}$ en posant : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n^{(k)} = n^k$.

(a) *Montrer que $x^{(k)} \in E_a^{(p)}$ pour tout $k \in \{0, \ldots, p\}$.*
Soit $k \in \{0, \ldots, p\}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1}^{(k)} - ax_n^{(k)} = (n+1)^k - an^k = P^{(k)}(n)$, où $P^{(k)}(X) = (X+1)^k - aX^k$ est un polynôme de dégré inférieur ou égal à p. Ceci montre bien que $x^{(k)} \in E_a^{(p)}$

(b) *Montrer que la famille $(x^{(0)}, \ldots, x^{(p)}, y)$ est une base de $E_a^{(p)}$.*
La famille $(x^{(0)}, \ldots, x^{(p)}, y)$ contient $p+2$ éléments et $\dim(E_a^{(p)}) = p+2$ donc pour montrer que c'est une base de $E_a^{(p)}$, il suffit de montrer que cette famille est libre.

Supposons qu'il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_p, \mu$ des réels tels que $w = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k x^{(k)} + \mu y = 0$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k n^k + \mu a^n = 0$.
En particulier, en évaluant en $n = 0, 1$ on obtient

$$\sum_{k=0}^{p} \lambda_k + \mu = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{p} \lambda_k + \mu a = 0 \ .$$

Donc $\mu = \mu a$, d'où $\mu = 0$ puisque $a \neq 1$.
Ensuite, puisque $\sum_{k=0}^{p} \lambda_k n^k$ le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$ a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul, par conséquent tous ses coefficients sont nuls : $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$.
On vient de montrer que la famille $(x^{(0)}, \ldots, x^{(p)}, y)$ est libre.

10. *Application : déterminer la suite u vérifiant les relations $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 2n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
On a $u \in E_2^{(1)}$ et on vient de montrer que $(x^{(0)}, x^{(1)}, y)$ est une base de $E_2^{(1)}$ donc il existe λ_0, λ_1 et μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda_0 + \lambda_1 n + \mu 2^n$. On injecte dans la relation de récurence définissant u et on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_0 + \mu = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, (\lambda_0 + \lambda_1) + \lambda_1 n = 2\lambda_0 + 5 + (2\lambda_1 - 2)n \end{cases} ,$$

d'où

$$\begin{cases} \lambda_0 + \mu = -2 \\ \lambda_0 + \lambda_1 = 2\lambda_0 + 5 \\ \lambda_1 = 2\lambda_1 - 2 \end{cases} \quad \Gamma$$

Finalement, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_0 = -3$, $\mu = 1$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = -3 + 2n + 2^n$.