Sujet CCP du 1er février, durée 1h30

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

Problème 1. On considère les matrices

$$J = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \ , \ K = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ , \ L = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Dans ce problème, pour $t \in \mathbb{R}$ on note $M(t) = J + tK + t^2L$.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$ donner les coefficients de $M(t)$. Montrer que $M(1) = I_3$.
2. Montrer que $J^2 = J$ et $JK = KJ = 0$. Dans la suite on admettra qu'on a aussi $K^2 = K, L^2 = L$, et $LK = KL = JL = LJ = 0$.
3. Montrer que, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ on a $M(t)M(s) = M(ts)$.
4. Déterminer tous les réels t tels que $M(t)$ est inversible, et préciser alors $M(t)^{-1}$.
5. Montrer que $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible (on n'essaiera pas de calculer P^{-1}) et que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a l'égalité
$$M(t)P = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix} .$$
6. Calculer $P^{-1}M(t)P$ pour $t \in \mathbb{R}$ et en déduire une nouvelle preuve du fait que $M(s)M(t) = M(st)$ pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

Problème 2. Dans tout ce problème, a désigne un réel différent de 1. On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

où P est un polynôme.
On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé par les suites réelles. Un élément de E est noté indifféremment $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou u. On fixe un entier naturel p et on définit

$$E_a^{(p)} = \{u \in E \colon \exists P \in \mathbb{R}_p[X] \ \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = au_n + P(n)\}$$

1. Montrer que $E_a^{(p)}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $u \in E_a^{(p)}$. Par définition, il existe un polynôme P tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + P(n)$. Montrer qu'un tel polynôme est unique. Dans la suite, on note $P = P_u$.
3. On définit une suite y en posant $y(n) = a^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les éléments de $E_a^{(p)}$ pour lesquels $P_u = 0$ sont exactement les multiples de y.

4. On considère maintenant
$$F_a^{(p)} = \{u \in E_a^{(p)} \colon u_0 = 0\} \ .$$
On admet que c'est un sous-espace vectoriel de $E_a^{(p)}$. Montrer que, pour $u, v \in F_a^{(p)}$, on a $P_u = P_v$ si et seulement si $u = v$.
5. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_p[X]$ il existe un unique $u \in F_a^{(p)}$ tel que $P = P_u$.
6. *(*Question difficile)* Montrer que $F_a^{(p)}$ est de dimension $p + 1$.
7. Montrer que
$$E_a^{(p)} = F_a^{(p)} \oplus \mathrm{Vect}(y) \ .$$
Indication. Utiliser $v \in F_a^{(p)}$ tel que $P_v = P_u$ et considérer $u - v$.
8. Donner la dimension de $E_a^{(p)}$.
9. On définit, pour $k \in \{0, \ldots, p\}$, une suite $x^{(k)}$ en posant : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n^{(k)} = n^k$.
   (a) Montrer que $x^{(k)} \in E_a^{(p)}$ pour tout $k \in \{0, \ldots, p\}$.
   (b) Montrer que la famille $(x^{(0)}, \ldots, x^{(p)}, y)$ est une base de $E_a^{(p)}$.
10. Application : déterminer la suite u vérifiant les relations $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 2n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.