Problème du 17 février 2016, corrigé.

Problème 1. On considère le polynôme $P(X) = X^5 - 1$ de $\mathbb{R}[X]$. Le but de cet exercice est de déterminer la valeur exacte du réel $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. On pose aussi $\beta = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

1. (a) *Donner les racines cinquièmes de l'unité, puis décomposer le polynôme P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.*
   Notons $\omega = e^{2i\pi/5}$. Les racines cinquièmes de l'unité sont $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$. On a donc
   $$P(X) = (X-1)(X-\omega)(X-\omega^2)(X-\omega^3)(X-\omega^4).$$
   (b) *En déduire une décomposition de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.*
   On a $\omega^4 = \bar{\omega}$ et $\omega^3 = \overline{\omega^2}$ donc
   $$(X-\omega)(X-\omega^4) = X^2 - 2\mathrm{Re}(\omega)X + \omega^5 = X^2 - 2\alpha X + 1$$
   et
   $$(X-\omega^2)(X-\omega^3) = X^2 - 2\mathrm{Re}(\omega^2)X + \omega^5 = X^2 - 2\beta X + 1.$$
   Ainsi, la décomposition de P en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est
   $$P(X) = (X-1)(X^2 - 2\alpha X + 1)(X^2 - 2\beta X + 1).$$
2. *Justifier que le polynôme $X - 1$ divise le polynôme $X^5 - 1$ et déterminer le quotient*
   $$Q = \frac{X^5 - 1}{X - 1}$$
   On donnera l'expression développée du polynôme Q.
   1 est racine de $X^5 - 1$ donc $X - 1$ divise $X^5 - 1$. De plus, on a
   $$Q = \frac{X^5 - 1}{X - 1} = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1.$$
3. *En déduire, sans aucun calcul, l'écriture factoriseée de Q dans $\mathbb{R}[X]$.*
   Le résultat de la question 1.(b) donne par ailleurs $Q(X) = (X^2 - 2\alpha X + 1)(X^2 - 2\beta X + 1)$.
4. *Développer cette dernière expression et en déduire la valeur des réels $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$.*
   En développant, on obtient $Q(X) = X^4 - 2(\alpha+\beta)X^3 + (2 + 4\alpha\beta)X^2 - 2(\alpha+\beta)X + 1$. Par unicité des coefficients, on en déduit que $\alpha + \beta = -\frac{1}{2}$ et $\alpha\beta = -\frac{1}{4}$.
5. *En déduire la valeur exacte de α.*
   Ainsi, α et β sont les racines du polynôme $X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$. Or ces racines sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Comme $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, $\alpha > 0$ donc $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Problème 2. On se propose d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}^* \ f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \ .$$

1. *Démontrer que la fonction f est continue en 0.*
   On a $\dfrac{x}{e^x - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$. La fonction f est donc continue en 0.
2. *En détaillant les calculs, déterminer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.*
   Le développement limité de $e^x - 1$ au voisinage de 0 commence par x donc on devra simplifier par x le numérateur et le dénominateur de $f(x)$, ce qui nous oblige à partir d'un DL à l'ordre 3 de $e^x - 1$ pour calculer un DL à l'ordre 2 de $f(x)$. On a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} \\
&= \frac{1}{1+u}, \text{ avec } u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2),\ u \underset{x\to 0}{\to} 0 \\
&= 1 - u + u^2 + \underset{u\to 0}{o}(u^2) \\
&= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).
\end{aligned}$$

3. *En déduire que f est dérivable en 0 ; préciser $f'(0)$.*
   f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 donc f est dérivable en 0, et $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\dfrac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1)$ donc $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
4. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ g(x) = (1 - x)e^x - 1\ .$$

   (a) *Déterminer le signe de la fonction g.*
   g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -xe^x$.Ainsi, g' est strictement positive sur $]-\infty, 0[$ et strictement négative sur $]0, +\infty[$, donc g est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Elle atteint donc son maximum en 0, et $g(0) = 0$ donc g est strictement négative sur $\mathbb{R}^*$.

   (b) *En déduire les variations de la fonction f.*
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$. De plus f est dérivable en 0, avec $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
5. *Déterminer la limite de f en $-\infty$.*
   On a $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x - 1 = -1$ et donc $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.
6. *Déterminer la limite de f en $+\infty$.*
   On a $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$ donc $e^x - 1 \underset{+\infty}{\sim} e^x$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} xe^{-x}$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.
7. *Montrer que $f(x) + x$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$. Que peut-on en déduire quant à la courbe représentative de f ?*

Pour tout $x \neq 0$, $f(x) + x = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, $e^x - 1 \underset{-\infty}{\sim} -1$, et $f(x) + x \underset{-\infty}{\sim} -xe^x$. Par croissances comparées, on en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + x = 0$.

Cela signifie que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = -x$ pour asymptote au voisinage de $-\infty$.

Problème 3. Pour toutes les propositions, répondre par vrai ou faux et surtout **justifier avec précision** votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

1. *Un polynôme à coefficients réels de degré strictement supérieur à 2 admet toujours une racine réelle.*

   FAUX : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^4 + 1 \geq 1$ donc le polynôme $P(X) = X^4 + 1$ n'a pas de racines réelles.

2. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si f change de signe, alors f s'annule.*

   FAUX : la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ change de signe mais ne s'annule pas.

3. *Une suite réelle non majorée tend vers $+\infty$.*

   FAUX : la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n n$ n'est pas majorée mais ne tend pas vers $+\infty$. En effet, $\lim\limits_{k \to +\infty} u_{2k} = +\infty$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} u_{2k+1} = -\infty$.

4. *On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. La fonction f n'est pas de classe C^1 en 0.*

   VRAI : d'abord, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ (produit, composée de fonctions C^1).

   Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

   Or, pour tout $x \neq 0$, $\left|2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 2|x|$ donc $\lim_{x \to 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, mais $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite quand x tend vers 0.

   En effet, notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos\left(\dfrac{1}{u_n}\right) = 1$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos\left(\dfrac{1}{v_n}\right) = 0$.

   Ainsi, $f'(x)$ n'admet pas de limite quand x tend vers 0, elle ne peut donc pas être continue en 0.

5. Si une fonction polynôme P à coefficients réels admet 3 racines distinctes, sa dérivée P' admet au moins 2 racines distinctes.

   FAUX : le polynôme $P(X) = X^3 - 1$ est à coefficients réels, a trois racines disctinctes $1, j, \bar{j}$ mais sa dérivée $P'(X) = 3X^2$ a une racine double, 0.

   Remarque : si on précise "trois racines réelles distinctes", alors c'est vrai. En effet, la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Notons $a < b < c$ les trois racines distinctes de P. Par le théorème de Rolle appliqué sur $[a, b]$, puis qur $[b, c]$, il existe $\alpha \in]a, b[$ et $\beta \in]b, c[$ tels que $P'(\alpha) = 0$ et $P'(\beta) = 0$.