Problème du 17 février 2016, durée 1h30.

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

Les problèmes ci-dessous sont indépendants.

Problème 1. On considère le polynôme $P(X) = X^5 - 1$ de $\mathbb{R}[X]$. Le but de cet exercice est de déterminer la valeur exacte du réel $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. On pose aussi $\beta = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

1. (a) Donner les racines cinquièmes de l'unité, puis décomposer le polynôme P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
   (b) En déduire une décomposition de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Justifier que le polynôme $X - 1$ divise le polynôme $X^5 - 1$ et déterminer le quotient
$$Q = \frac{X^5 - 1}{X - 1}$$
   On donnera l'expression développée du polynôme Q.
3. En déduire, sans aucun calcul, l'écriture factorisée de Q dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Développer cette dernière expression et en déduire la valeur des réels $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$.
5. En déduire la valeur exacte de α.

Problème 2. On se propose d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}^* \; f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \; .$$

1. Démontrer que la fonction f est continue en 0.
2. En détaillant les calculs, déterminer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
3. En déduire que f est dérivable en 0 ; préciser $f'(0)$.
4. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \; g(x) = (1 - x)e^x - 1 \; .$$
   (a) Déterminer le signe de la fonction g.
   (b) En déduire les variations de la fonction f.
5. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
6. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
7. Montrer que $f(x) + x$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$. Que peut-on en déduire quant à la courbe représentative de f ?

Problème 3. Pour toutes les propositions, répondre par vrai ou faux et surtout **justifier avec précision** votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

1. Un polynôme à coefficients réels de degré strictement supérieur à 2 admet toujours une racine réelle.
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si f change de signe, alors f s'annule.
3. Une suite réelle non majorée tend vers $+\infty$.
4. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. La fonction f n'est pas de classe C^1 en 0.
5. Si une fonction polynôme P à coefficients réels admet 3 racines distinctes, sa dérivée P' admet au moins 2 racines distinctes.