Solution de l'exercice 1 :
1) Pour éviter des redites inutiles, on fusionnera la question 1 avec une partie de la question 3 et on étudie d'un seul coup les convergences simples sur $[0, +\infty[$.
La méthode est simple : on annonce avec fermeté qu'on **fixe le réel** positif x. Puis on fait tendre n vers l'infini.

Commençons par (f_n). Il n'y a pas l'ombre d'une forme indéterminée dans la suite $(f_n(x))$: celle-ci tend vers $0 + \arctan x = \arctan x$ quand n tend vers l'infini.
On conclut en affirmant que la suite de fonctions (f_n) converge **simplement** vers la fonction $f = \arctan$ sur $[0, +\infty[$ (et donc sur tout sous-ensemble de cet intervalle).

On fait de même avec (g_n). On doit être un peu prudent : en général, c'est-à-dire si $x = 0$, le comportement de la suite $(g_n(x))$ se traite en considérant un équivalent du dénominateur, à savoir nx puis en écrivant que $g_n(x) \sim 1$ donc $g_n(x) \to 1$ quand n tend vers l'infini ; mais si $x = 0$ ce serait une boulette puisqu'on écrirait un équivalent à 0 ce qui n'est pas une bonne chose. Quand $x = 0$, de fait, la suite $(g_n(0))$ est bêtement la suite nulle et converge vers 0. On synthétise en posant $g(x) = 0$ si $x = 0$ et $g(x) = 1$ ailleurs et on peut alors affirmer que (g_n) converge **simplement** vers la fonction g sur $[0, +\infty[$ (et donc sur tout sous-ensemble de cet intervalle).

2) La méthode standardisée d'étude d'une convergence uniforme est la suivante :
* fixer provisoirement n (je le fais avec grande lourdeur dans ce chapitre, pour bien insister)
* poser $M_n = \|f_n - f\|_\infty$. Idéalement calculer M_n ; si ça se révèle un peu difficile, se contenter de l'estimer
* cesser de fixer n (toujours lourd, je l'annonce à chaque fois explicitement, quand je suis dans ce chapitre).
* lorsqu'il y a convergence uniforme, montrer que M_n tend vers zéro, et annoncer qu'on a fini. Lorsqu'il n'y a pas convergence uniforme, montrer que M_n ne tend pas vers zéro puis répéter une phrase stéréotypée, et annoncer qu'on a fini.

Lorsque la réponse est « non », il arrive souvent qu'on échappe à ce plan standardisé en montrant qu'un des énoncés que la convergence uniforme impliquerait est violé.
Bon, tout ça est bien gentil, mais ce sera plus clair sur des exemples.
On va commencer par (f_n), qui va donner un exemple simple de réponse affirmative.

Fixons donc, provisoirement, un entier $n \geq 1$, et posons $M_n = \|f_n - f\|_\infty$, où il est entendu qu'il s'agit des restrictions de f_n et de f à l'intervalle $[0, 1]$.
On va ici calculer tout à fait explicitement M_n. Pour ce, on commence par expliciter, pour $x \in [0, 1]$ la valeur $|f_n(x) - f(x)| = \left|\dfrac{x}{x+n}\right| = \dfrac{x}{x+n}$.
Se refusant à trouver des artifices de calcul plus élégants (il y en a), on dérive très stupidement cette dernière expression comme fonction de x, et on constate que sa dérivée, qui est $\dfrac{n}{(x+n)^2}$ est strictement positive.
La valeur maximale de cette fonction est donc atteinte en la borne droite de l'intervalle de définition, et $M_n = (f_n - f)(1) = \dfrac{1}{n+1}$.
On cesse alors de fixer n.
Puis on fait tendre n vers l'infini. On constate que M_n tend vers 0. Ceci prouve, par définition, la convergence **uniforme** de (f_n) vers f sur $[0, 1]$.
Pour les intervalles plus petits suggérés ensuite, la convergence sur un gros intervalle entraîne la convergence des restrictions sur un intervalle plus petit : la convergence est donc uniforme également sur $]0, 1]$ puis sur $[a, 1]$.
Passons à g_n.

On va commencer par traiter g_n avec exactement le même plan, on se retournera à la fin pour remarquer qu'on aurait pu aller plus vite.
Fixons donc, provisoirement, un entier $n \geq 1$, et posons $M_n = \|g_n - g\|_\infty$, où il est entendu qu'il s'agit des restrictions de g_n et de g à l'intervalle $[0, 1]$.
On va ici calculer tout à fait explicitement M_n. Pour ce, on commence par expliciter, pour $x \in]0, 1]$ la valeur $|g_n(x) - g(x)| = \left|\dfrac{nx}{1+nx} - 1\right| = \left|-\dfrac{1}{1+nx}\right| = \dfrac{1}{1+nx}$. Ici il faut traiter à part $|g_n(0) - g(0)| = |0 - 0| = 0$.

On dérive ensuite stupidement la fraction $\dfrac{1}{1+nx}$ comme fonction de x, et on constate que sa dérivée, qui est $-\dfrac{n}{(1+nx)^2}$ est strictement négative. La borne supérieure de cette fonction est donc égale à sa limite en la borne gauche de son intervalle d'étude, à savoir 0, limite qui est égale à 1. On note au passage que $|g_n(0)-g(0)|=0\leq 1$ et on conclut que $M_n=1$.
On cesse alors de fixer n.
Puis on fait tendre n vers l'infini. On constate que M_n ne tend pas vers 0.
C'est le moment annoncé de finir par une phrase stéréotypée : on vient de montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme de la suite (g_n) vers g. Par ailleurs, s'il y a convergence uniforme, c'est nécessairement vers la limite simple. Il n'y a donc pas convergence uniforme de (g_n).
Bon, ce n'était pas très difficile mais quand même assez long. Ne pouvait-on faire plus rapidement ?

Oui on pouvait. En jouant sur le théorème de continuité des limites uniformes. On constate que chaque g_n est continue, tandis que g ne l'est pas. Par application du théorème de continuité des limites uniformes, ceci prouve que la suite (g_n) ne peut pas converger uniformément vers g. On replace la phrase stéréotypée écrite ci-dessus et on a fini.

On a maintenant à traiter (g_n) sur l'intervalle $]0,1]$. On peut refaire la version longue, en revenant à la définition de la convergence uniforme, en un peu plus court puisqu'on n'a pas à faire de remarque sur $g_n(0)$ et $g(0)$; on conclut exactement comme plus haut à la non-convergence. Une autre façon de raisonner est de fonctionner par l'absurde : sur $\{0\}$, il y a convergence uniforme puisque sur un ensemble fini la convergence simple entraîne immédiatement la convergence uniforme. Si on l'avait aussi sur $]0,1]$ on l'aurait sur la réunion $[0,1]$ des deux domaines de restriction (notez que ça marche pour une union finie seulement !). Or on ne l'a pas, donc on ne l'a pas non plus sur $]0,1]$. Une dernière façon est de reposer sur les théorèmes de passage à la limite - qui ne sont qu'une petite variante des raisonnements de continuité utilisés sur $[0,1]$: puisque chaque g_n tend vers 0 quand x tend vers 0, la limite uniforme éventuelle de (g_n) sur $]0,1]$ ne pourrait être qu'une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers 0 dans cet intervalle, or la fonction g, qui est la fonction constante égale à 1, ne tend pas vers zéro.

Il reste enfin à traiter de la suite (g_n) sur $[a,1]$. Là le calcul à base d'étude des variations de $|g_n-g|=g-g_n$ fait plus haut devient assez incontournable. Vu la décroissance de cette fonction, sa plus grande valeur est prise à gauche de l'intervalle c'est-à-dire en a, donc $M_n=g(a)-g_n(a)$ (qu'il est plus intelligent de ne pas calculer davantage).
Cessons désormais de fixer n. Alors vu la convergence simple de g_n vers g, $g_n(a)$ tend vers $g(a)$ quand n tend vers l'infini. Et donc M_n tend vers 0, ce qui prouve la convergence uniforme.
Remarquons au passage qu'il a donc convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[\dfrac{1}{k},1]$ mais pas sur leur réunion, qui est l'intervalle $]0,1]$.

3) C'est assez similaire à ce qu'on a fait au 2, les rôles de f et de g s'échangeant.

On commence par f, pour laquelle la convergence uniforme va échouer. Cela se justifie bien avec les théorèmes de passage à la limite : chaque f_n tend vers $1+\dfrac{\pi}{2}$ quand x tend vers l'infini, tandis que $f(x)=\arctan x$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$. Ceci empêche que (f_n) ne converge uniformément vers f. Comme une suite de fonctions ne peut converger uniformément que vers sa limite simple, ceci exclut que (f_n) converge vers quoi que ce soit.

On continue avec g. Là au contraire la réponse va être positive, par le même raisonnement qu'on a utilisé sur $[a,1]$: vu la décroissance de la fonction positive $g-g_n$, sur l'intervalle d'étude le maximum de $|g_n-g|$ est atteint au point 1, autrement dit $M_n=g(1)-g_n(1)$. Quand on cesse de fixer n et qu'on le fait tendre vers l'infini, cette quantité tend vers 0 ce qui est exactement, par définition, la convergence uniforme de (g_n) vers g.

Solution de l'exercice 2 :
1) Puisqu'on nous demande d'étudier une convergence simple, on va d'abord fixer un x dans $[-1,1]$. Le raisonnement mène à distinguer deux cas :
* si $x \neq 0$, on majore le sinus en valeur absolue par 1, autrement dit on écrit que $0 \leq |f_n(x)| \leq e^{-nx^2} = \left(e^{-x^2}\right)^n$, et par les gendarmes on voit tout de suite que $f_n(x)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini ;
* si $x = 0$, on constate que pour tout n, $f_n(0) = 0$ donc que la suite des $f_n(0)$ tend vers 0.
En faisant la synthèse de ces deux cas, on voit que si on note f la fonction nulle, la suite (f_n) converge simplement vers f sur $[-1,1]$.

2) Fixons provisoirement n et notons $M_n = \|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty$ (étant entendu qu'on travaille en restriction à $[0,1]$). Le calcul exact de M_n n'est pas très engageant, mais on peut le minorer intelligemment : chaque valeur de la fonction $|f_n|$ est un minorant de M_n. Une valeur intéressante est la plus petite où le sinus vaut 1 car à cet endroit l'exponentielle ne sera pas encore trop petite. Plus spécifiquement, ne nous intéressons qu'à des n supérieurs ou égaux à 2 et notons $x_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, qui appartient bien à $[0,1]$ et qui a été choisi de telle sorte que $nx_n^2 = n\dfrac{\pi}{2n} = \dfrac{\pi}{2}$, d'où $f_n(x_n) = \sin(\dfrac{\pi}{2})e^{-\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$. Comme dit un peu plus haut, on peut alors minorer $e =^{-\frac{\pi}{2}}= f_n(x_n) \leq M_n$.
Cessons de fixer n et faisons le tendre vers l'infini. L'inégalité qui précède assure que (M_n) ne tend pas vers zéro : la suite (f_n) ne tend pas uniformément vers f. Comme il est exclu qu'elle tende uniformément vers une autre fonction que sa limite simple, elle ne converge pas au sens de la convergence uniforme.

3) Soit $a > 0$ fixé. Fixons provisoirement n. On va de nouveau estimer $M_n = \|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty$ (étant entendu cette fois qu'on travaille en restriction à $[a,1]$). Pour tout x de $[a,1]$, on peut écrire les majorations $|sin(nx^2)| \leq 1$ et $e^{-nx^2} \leq e^{-na^2}$ dont on déduit que $|f_n(x)| \leq e^{-na^2}$ puis, en prenant le Sup sur x, que $M_n \leq e^{-na^2}$.
Cessons désormais de fixer n et faisons le tendre vers l'infini. On constate alors que $e^{-na^2} = \left(e^{-a^2}\right)^n$ tend vers 0, donc M_n aussi. Ceci prouve la convergence uniforme de f_n vers la fonction nulle f sur $[a,1]$.

Solution de l'exercice 3 : Avant de nous lancer dans la question posée, intéressons nous à la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0,1]$. Ceci se traite en fixant une valeur de x dans cet intervalle. Si cette valeur est strictement inférieure à 1, l'étude de la suite $(f_n(x))$ ne se heurte à aucune difficulté : sans l'ombre d'une forme indéterminée, elle converge vers 0. Le cas où $x = 1$ doit être traité à part. Pour cette valeur spécifique, on a l'égalité $f_n(1) = \dfrac{1}{2e}$, valable pour tout n ; la suite numérique $(f_n(1))$, constante, tend donc vers $\dfrac{1}{2e}$.
Finalement si on note f la fonction qui est nulle sur $[0,1[$ et prend la valeur $\dfrac{1}{2e}$ au point 1, on a ainsi prouvé que la suite de fonctions (f_n) converge vers f.

Sur $[0,1]$ et sur $[0,1[$, il n'y a pas convergence uniforme. Je n'écris pas les détails tant c'est similaire à la suite (g_n) de la première question : c'est parce qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue, ou parce qu'une limite uniforme de fonctions qui ont une même limite doit avoir la même limite.

Fixons désormais un $a \in]0,1[$. On va sans suprise montrer que, en restriction à l'intervalle $[0,a]$, la suite (f_n) converge vers la fonction nulle f. Pour ce faire, on fixe provisoirement n et on regarde de près la fonction $x \mapsto |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| = f_n(x)$, et notons M_n sa borne supérieure. On va majorer cette quantité, l'étude des variations de f_n ne semblant pas particulièrement facile.

On majore les facteurs du numérateur : pour tout x de $[0,a]$, $0 \leq x^n \leq a^n$ et $0 \leq e^{-x} \leq 1$, et on minore le dénominateur : $0 < 1 \leq 1 + x^n$. En mettant tout cela ensemble puis en passant à la borne supérieure, on obtient $0 \leq f_n(x) \leq a^n$ puis $M_n \leq a^n$.
Cessons alors de fixer n et faisons le tendre vers l'infini. On constate que M_n tend vers zéro : c'est donc qu'il y a convergence uniforme.

Solution de l'exercice 4 :
1) La convergence simple peut sembler un peu déstabilisante, le raisonnement suivi sortant un peu de l'ordinaire sans être bien difficile. Il sera important d'avoir l'esprit clair : la première chose que nous faisons est de fixer un x dans $[0,1[$ qui n'a pas vocation à bouger.
On doit alors réfléchir au comportement de la suite numérique $(f_n(x))$ quand n tend vers l'infini ; autrement dit comprendre comment se comporte $\min(n, \frac{1}{\sqrt{1-x}})$ quand n tend vers l'infini.

Si on a l'esprit vif, on réalise que dès que n est suffisamment grand (explicitement dès que n est strictement supérieur à la partie entière de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$), ce minimum est égal à $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ puisque ce dernier réel ne bouge pas tandis que n croît jusqu'à le dépasser. La suite des $(f_n(x))$ est en fait une suite constante à partir d'un certain rang, rang à partir duquel elle vaut $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Elle est donc convergente, et convergente vers $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.
En notant cette expression $f(x)$, on vient ainsi de prouver la convergence simple de la suite (f_n) vers la fonction f.

2) Dans cette question, au contraire, on fixe n. Quand x tend vers 1^-, l'expression $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ tend vers l'infini ; pour dire cela informellement la fonction $f(x)$ finit par dépasser n et le minimum de n et $f(x)$ finit par se stabiliser à n. Plus précisément, on constate que dès que $x \geq 1 - \frac{1}{n^2}$, on peut écrire $0 < 1-x \leq \frac{1}{n^2}$ puis $0 < \sqrt{1-x} \leq \frac{1}{n}$ puis $0 < n \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ et donc $f_n(x) = n$. D'où on déduit aussitôt que $f_n(x)$ tend vers n quand x tend vers 1^-.

3) Je ne suis pas sûr d'avoir bien compris où l'énoncé voulait en venir. En tous cas, si on appelle M_n la borne supérieure de $|f - f_n| = f - f_n$ sur $[0,1[$, on constate très vite que $M_n = +\infty$ puisque la fonction dont on souhaiterait calculer la borne supérieure tend vers $+\infty$ en 1^-. De façon particulièrement visible, M_n ne tend pas vers 0 : il n'y a donc pas convergence uniforme de f_n vers f. Comme il ne peut y avoir de convergence uniforme vers une autre fonction que la limite simple, il n'y a pas convergence uniforme de la suite (f_n), vers quelque fonction limite que ce soit.

Solution de l'exercice 5 :
1) On fixe un x dans $[0,1]$. On traite à part le cas où $x = 0$: dans ce cas tous les $f_n(0)$ valent 0 et la suite $(f_n(0))$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Pour $x \neq 0$, on constate que quand n tend vers l'infini le dénominateur est équivalent à $2^n n x^2$, donc que $f_n(x)$ est équivalent à $\frac{1}{nx}$ quand n tend vers l'infini. En particulier, il tend vers 0.
La suite de fonctions (f_n) tend donc vers la fonction nulle.

2) On écrit sans peine que :

$$I_n = \int_0^1 \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2} = \left[\frac{1}{2n} \ln\left(1 + 2^n n x^2\right)\right]_0^1 = \frac{\ln(1 + 2^n n)}{2n} = \frac{\ln(2^n n(1 + \frac{1}{2^n n}))}{2n}$$

dont on déduit que, quand $n \to +\infty$:

$$I_n = \frac{n \ln 2}{2n} + \frac{\ln n}{2n} + o(1) = \frac{\ln 2}{2} + o(1)$$

La suite numérique (I_n) converge donc vers le réel $\frac{\ln 2}{2}$.
Si la suite (f_n) était uniformément convergente, ce ne pourrait être que vers sa limite simple, à savoir la fonction nulle - dont l'intégrale sur $[0,1]$ est nulle. Mais si c'était le cas, la convergence uniforme impliquant la convergence des intégrales sur les intervalles de longueur finie, la suite (I_n) convergerait vers 0. Ce qu'elle ne fait pas.

3) Comme à la question précédente, on peut d'abord remarquer que l'éventuelle convergence uniforme de la suite (f_n) n'est envisageable que vers la fonction nulle notée f, On se penche ensuite, pour n fixé, sur la

quantité $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty$ qu'on note M_n. On se penche ensuite sur la valeur $f_n\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$: puisque c'est une valeur prise par $f_n = |f_n|$, ce réel minore M_n. Or ce réel vaut $\dfrac{1}{1+\frac{n}{2^n}}$ et tend donc vers 1 quand n tend vers l'infini. Ceci exclut que M_n puisse tendre vers zéro, et exclut ainsi la convergence uniforme de la suite (f_n).

Solution de l'exercice 6 :
1) On fixe un x réel. Quand n tend vers l'infini, le numérateur est équivalent à ne^{-x} tandis que le dénominateur est équivalent à n. La suite de fonctions (f_n) tend donc simplement vers la fonction f définie par $f(x) = e^{-x}$.

2) On fixe provisoirement $n \geq 1$ et, pour x élément de $[a, b]$, on explicite la différence :

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{ne^{-x} + x^2 - ne^{-x} - x^2e^{-x}}{n + x^2}\right| = \frac{x^2|1 - e^{-x}|}{n + x^2}.$$

Comme d'habitude on note ensuite $M_n = \|f_n - f\|_\infty$.
Il sera confortable de noter $M = \mathrm{Max}_{x\in[a,b]}x^2|1 - e^{-x}|$ (qui existe puisqu'il s'agit d'une fonction continue de x sur un intervalle fermé borné). Vu l'explicitation de $|f_n(x) - f(x)|$ déroulée plus haut, et en minorant par n le dénominateur de cette expression, on obtient la majoration $M_n \leq \dfrac{M}{n}$.

On cesse alors de fixer n, et on le fait tendre vers l'infini : on constate que M_n tend vers 0, c'est-à-dire que la convergence est uniforme.

3) Pour n fixé, on fait tendre x vers l'infini : la limite en $+\infty$ de la fonction f_n est alors 1, puisque tant le numérateur que le dénominateur sont équivalents à x^2. On fait ensuite tendre n vers l'infini : la limite de cette suite de limites est la limite d'une suite constante, c'est encore 1.
Par le théorème dit de la double-limite, si (f_n) convergeait uniformément vers f, la limite de f en $+\infty$ existerait, et serait aussi égale à 1. Mais la limite de f en $+\infty$ est manifestement nulle. C'est donc que (f_n) ne converge pas uniformément vers f. Comme elle ne peut converger uniformément vers une fonction qui ne serait pas sa limite simple, elle ne converge pas uniformément.

4) Puisqu'il y a convergence uniforme de f_n vers f sur l'intervalle fermé borné $[0, 1]$, tous les protagonistes étant continus sur cet intervalle, la suite d'intégrales à étudier tend vers l'intégrale sur le dit intervalle de la limite uniforme f, c'est-à-dire vers $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$.

Solution de l'exercice 7 :
1) On fixe un x de $[0, 1]$. Le cas où x est nul est à traiter séparément ; dans ce cas pour tous $n \geq 2$, le réel $f_n(0)$ vaut 0 et donc la suite de ces réels tend vers 0. Supposons x non nul. Alors dès que n est suffisamment grand (explicitement dès que $\frac{2}{x} \leq n$), on est dans une situation où $\frac{2}{n} \leq x$ et donc où la deuxième formule s'applique. La suite $(f_n(x))$ est donc nulle à partir d'un certain rang, et converge vers 0. On a ainsi montré que la suite de fonctions (f_n) converge vers la fonction nulle.

2) Il suffit de calculer explicitement chacune de ces intégrales :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{2/n} f_n(x)\,dx + \int_{2/n}^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{2/n} (-n^3x^2 + 2n^2x)\,dx = \left[-\frac{n^3}{3}x^3 + n^2x^2\right]_0^{2/n} = \frac{4}{3}$$

La suite à étudier est constante, et tend vers $\frac{4}{3}$ quand n tend vers l'infini.

Si la suite (f_n) convergeait, ça ne pourrait être que vers la limite simple de (f_n) donc vers la fonction nulle. L'intégrale de f_n sur l'intervalle de longueur finie $[0, 1]$ tendrait alors vers l'intégrale de la fonction nulle, qui est nulle. Or $\dfrac{4}{3}$ n'est, lui, pas nul.

Solution de l'exercice 8 :
1) On va avoir à estimer le nombre $M_n = \|f_n\|_\infty$. Pour ce faire, il est opportun d'étudier les variations de f_n en commençant par calculer sa dérivée :

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= -n\cos^{n-1}x(\sin^2 x) + \cos^{n+1}x = \cos^{n-1}x[\cos^2 x - n\sin^2 x] \\ &= \cos^{n-1}x[1-\sin^2 x - n\sin^2 x] = \cos^{n-1}x[1-(n+1)\sin^2 x] \end{aligned}$$

Notons $c_n = \arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$. Alors sur l'intervalle $[0, c_n]$ la fonction f_n est strictement croissante (et vaut 0 en 0) tandis qu'elle est strictement décroissante sur $[c_n, \frac{\pi}{2}]$ (et vaut 0 en $\frac{\pi}{2}$).
On conclut que $M_n = f_n(c_n) = \cos^n(c_n)\sin(c_n) \leq \sin(c_n) = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.
2) On commence par fixer un δ avec $0 < \delta < \dfrac{\pi}{2}$. On note M_n la norme infini de g_n sur l'intervalle $[\delta, \dfrac{\pi}{2}]$. On peut majorer sans mal M_n en majorant le sinus par 1 et le cosinus par $\cos\delta$ (tous les facteurs sont positifs). On obtient : $M_n \leq (n+1)(\cos\delta)^n$. Cette majorante converge vers 0 par croissance comparée, donc aussi la suite (M_n). Ceci prouve la convergence uniforme.
Il est enfin très facile de calculer explicitement

$$\int_0^{\pi/2} g_n(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} (n+1)\cos^n t \sin t\,dt = -\left[(\cos t)^{n+1}\right]_0^{\pi/2} = 1$$

et de constater que cette suite, constante, tend vers 1 qui n'est, on le sait probablement, pas égal à 0.

Solution de l'exercice 9 :
1) Pour chaque $n \geq 0$ et chaque x de l'intervalle $[0, \dfrac{\pi}{4}]$, notons $f_n(x) = (\tan x)^n$. On observe que chaque f_n est une fonction continue par morceaux (et même continue).
On s'intéresse ensuite à la convergence simple de la suite (f_n). Pour ce faire, on fixe x dans l'intervalle d'étude et on observe que la suite numérique $(f_n(x))$ est une très ordinaire suite géométrique. Sa raison est dans $[0, 1[$ sauf dans le cas particulier où $x = \dfrac{\pi}{4}$, dans lequel cas c'est la suite constante égale à 1. Sa limite est donc nulle, sauf dans le cas particulier où $x = \dfrac{\pi}{4}$, dans lequel cas c'est 1.
On introduit donc la fonction f définie comme nulle sur $[0, \dfrac{\pi}{4}[$ et valant 1 à l'extrémité droite de cet intervalle. On vient ainsi de montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f. En outre, il est clair que la fonction f_n est continue par morceaux.
Introduisons enfin la fonction φ constante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et égale à 1. Cette fonction est clairement continue par morceaux (et même continue), intégrable sur son intervalle de définition, et majore toute les fonctions f_n -qui sont par ailleurs à valeurs positives donc égales à $|f_n|$.
Toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée sont donc remplies. On conclut que la suite numérique (u_n) tend vers l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/4} f$ c'est-à-dire vers 0.

2) Pour chaque $n \geq 0$ et chaque x de l'intervalle $[0, \infty[$, notons $f_n(x) = \dfrac{1}{x^n + e^x}$. On observe que chaque f_n est une fonction continue par morceaux (et même continue).
On s'intéresse ensuite à la convergence simple de la suite (f_n). Pour ce faire, on fixe x dans l'intervalle d'étude et on considère la suite numérique $(f_n(x))$, qui est construite à partir d'une très ordinaire suite géométrique. Sa limite va dépendre de la position de x dans l'intervalle : si $0 \leq x < 1$, x^n tend vers 0 donc $f_n(x)$ tend vers e^{-x} ; si $x = 1$, la suite $(f_n(x))$ est la suite constante qui prend la valeur $\dfrac{1}{1+e}$ et tend donc vers cette valeur ; enfin si $1 < x$, x^n tend vers l'infini puis, $f_n(x)$ tend vers 0.
On introduit donc la fonction f définie comme valant e^{-x} sur $[0, 1[$, $\dfrac{1}{1+e}$ au point 1 et nulle sur $]1, +\infty[$. On vient ainsi de montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f. En outre, il est clair que la fonction f_n est continue par morceaux.

Introduisons enfin la fonction φ définie par $\varphi(x) = e^{-x}$. Cette fonction est clairement continue par morceaux (et même continue), intégrable sur son intervalle de définition -la convergence en $+\infty$ de cette intégrale de fonction à valeurs positives est notoire- et majore toute les fonctions f_n -qui sont par ailleurs à valeurs positives donc égales à $|f_n|$.
Toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée sont donc remplies. On conclut que la suite numérique (u_n) tend vers l'intégrale sur $[0, +\infty[$ de f c'est-à-dire vers :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 e^{-x}\,dx + 0 = 1 - \frac{1}{e}.$$

Solution de l'exercice 10 :
1) Pour chaque $n \geq 1$ et chaque x positif, notons $f_n(x) = \arctan(nx)e^{-x^n}$. On commence par s'intéresser à la limite simple de la suite f_n. Pour ce faire, on fixe un x positif, et on distingue divers cas. Pour $x = 0$ tous les $f_n(0)$ valent 0 et la suite numérique $(f_n(0))$ converge donc vers 0. Pour $0 < x < 1$, l'arctangente tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand n tend vers l'infini, tandis que le x^n tend vers zéro puis l'exponentielle vers 1 : la suite numérique $(f_n(x))$ converge donc vers $\frac{\pi}{2}$. Pour $x = 1$, l'arctangente tend vers $\frac{\pi}{2}$ tandis que l'exponentielle reste constante à $\frac{1}{e}$; la suite numérique $(f_n(1))$ converge donc vers $\frac{\pi}{2e}$. Enfin pour $x > 1$, l'arctangente tend toujours vers $\frac{\pi}{2}$ mais l'exponentielle tend désormais vers 0 et finalement la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers 0.

On constate finalement la convergence simple de la suite (f_n) vers la fonction f définie comme suit : $f(0) = 0$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$ pour $0 < x < 1$, $f(1) = \frac{\pi}{2e}$ et enfin $f(x) = 0$ pour $x > 1$.

Pour la domination, on introduit la fonction φ définie comme suit : pour $0 \leq x \leq 1$, $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$ tandis que pour $x > 1$, $\varphi(x) = e^{-x}$. On constate que cette fonction est continue par morceaux, intégrable, et qu'elle domine toutes les $|f_n| = f_n$ (pour $n \geq 1$).
Toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée sont donc en place, et la limite demandée est donc égale à l'intégrale de 0 à $+\infty$ de la fonction f, qui vaut $\frac{\pi}{2}$.

2) L'étude de la convergence simple fait de nouveau intervenir une discussion sur x pour le traitement de la limite de la suite géométrique x^n ; on constate très vite que la suite (f_n) tend simplement vers la fonction f définie comme suit : pour $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, pour $x > 1$, $f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$.

On constate également sans mal qu'une dominante est φ définie sur $[0, +\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$, qui est bien intégrable (par exemple parce qu'on connaît le comportement à l'infini de sa primitive arctan).

On conclut que la limite cherchée est égale à

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx$$

La première de ces deux intégrales vaut $[\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. Pour la deuxième on fait dans un premier temps la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle qui y intervient, à savoir :

$$\frac{1}{X(1+X^2)} = \frac{1}{X} - \frac{X}{1+X^2}$$

dont on déduit que pour tout $y > 1$:

$$\int_1^y \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = \int_1^y \frac{1}{x}\,dx - \int_1^y \frac{x}{1+x^2}\,dx = [\ln x]_1^y - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^y = \ln y + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+y^2)$$

On regroupe enfin le $\ln(y) - \dfrac{1}{2}\ln(1+y^2) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{y^2}{1+y^2}\right)$ et on fait tendre y vers l'infini. On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)}\, dx = \frac{\ln 2}{2}$.

En faisant la synthèse de tous les calculs, la limite à calculer vaut donc $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\ln 2}{2}$.

Solution de l'exercice 11 :
Dans cette solution, et dans les suivantes, on notera $\mathbf{1}_A$ la fonction dite « indicatrice » de l'ensemble A c'est-à-dire celle qui prend la valeur 1 aux points de A et 0 hors de ceux-ci.
Une première formalité est de réécrire différemment l'intégrale à traiter. Avec la notation qui a été introduite ci-dessus, on peut l'écrire :

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,n]}(x) \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, dx$$

Notons ensuite, pour tout $n \geq 1$ et tout x positif,

$$f_n(x) = \mathbf{1}_{[0,n]}(x) \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$$

On s'intéresse dans un premier temps à la convergence simple de la suite de fonctions f_n. Fixons un x positif et constatons que le facteur $\mathbf{1}_{[0,n]}(x)$ vaut 1 dès que n est supérieur ou égal à x donc tend vers 1 quand n tend vers l'infini. On connaît bien par ailleurs la sempiternellement revue expression $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, dont on sait depuis bien longtemps que la limite est e^x. On conclut que (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par $f(x) = e^{-x}$.

Au vu de l'inégalité proposée par l'énoncé (et qu'on saurait montrer, par exemple en étudiant la fonction $u \mapsto u - \ln(1+u)$ parmi d'autres variantes), on peut -en passant à la forme exponentielle- vérifier que pour tous n et x l'inégalité $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \leq e^x$ est vraie. En majorant $\mathbf{1}_{[0,n]}(x)$ par 1 on obtient l'encadrement $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$.

Choisissons $\varphi = f$. Elle domine toutes les $|f_n|$ par le paragraphe précédent, et est notoirement intégrable.
Toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée sont ainsi rassemblées : la suite des intégrales tend vers l'intégrale sur $[0, +\infty[$ de f, qu'on a calculée depuis longtemps et qui vaut 1.

Solution de l'exercice 12 :
Dans un premier temps, on effectue dans l'intégrale à caculer le changement de variables $s = nt$. On obtient :

$$n\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\, dt = \int_0^n \frac{nf(s)}{n+s}\, ds = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,n]}(s)\frac{nf(s)}{n+s}\, ds$$

On note $f_n(s) = \mathbf{1}_{[0,n]}(s)\dfrac{nf(s)}{n+s}$ la fonction intégrée, et on s'intéresse à sa convergence simple. Quand n tend vers l'infini, le facteur $\mathbf{1}_{[0,n]}(s)$ tend vers 1 (par le même raisonnement qu'à l'exercice précédent), tandis que la fraction tend vers $f(s)$. On conclut que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f.

Notons maintenant $\varphi = f$. Cette fonction est intégrable et majore $|f_n|$ (qui est égal à f_n, la fonction f ne prenant que des valeurs positives), et cela parce que le facteur $\mathbf{1}_{[0,n]}(s)$ est borné par 1 ainsi que la fraction $\dfrac{n}{n+s}$.
Toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée sont ainsi rassemblées : la suite des intégrales tend vers l'intégrale sur $[0, +\infty[$ de f.

Solution de l'exercice 13 :
Dans cet exercice aussi ça se joue sur un changement de variable dans les intégrales à faire converger, ici spécifiquement $s = x^n$. Après exécution de celui-ci, on a écrit :

$$n \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s^{\frac{n-1}{n}}}\, ds$$

On note $f_n(s) = \dfrac{e^{-s}}{s^{\frac{n-1}{n}}}$. Pour chaque s fixé et quand n tend vers l'infini, cette expression tend vers $\dfrac{e^{-s}}{s}$, qu'on notera $f(s)$. On a ainsi montré la convergence simple de la suite (f_n) vers la fonction f.

Par ailleurs, $f_n(s)$ s'obtient à partir de $f(s)$ en le divisant par le réel $s^{\frac{n-1}{n}}$, qui est supérieur ou égal à 1 ; on dispose donc de l'encadrement $0 \leq f_n \leq f$. La fonction f est donc une majorante de la suite (f_n) et elle est elle-même intégrable puisque négligeable devant la fonction intégrable $s \mapsto e^{-s}$.
Le théorème de convergence dominée est donc applicable, et fournit le résultat demandé.

Solution de l'exercice 14 :
1) Pour chaque $n \geq 1$, on note $M_n = \|g_n\|_\infty$. On calcule sans mal M_n en faisant préalablement l'étude de la fonction (impaire) g_n sur $[0, 1]$. On calcule sans mal

$$g_n'(x) = \frac{(1 + nx)(1 - nx)}{(1 + n^2x^2)^2}$$

et on étudie son signe, dressant en conséquence le tableau des variations de g_n et constatant que $M_n = g_n(1/n)$. On calcule alors explicitement cette valeur et on obtient $M_n = 1/2n$.
Il n'y a plus qu'à faire tendre n vers l'infini et constater que M_n tend vers zéro, ceci prouve la convergence uniforme demandée par l'énoncé.

2) On commence par s'intéresser à la convergence simple de (g_n'), en utilisant son expression explicite fournie plus haut. On fixe un x dans $[-1, 1]$. Si c'est zéro, on voit que pour tout n, $g_n'(0) = 1$ et donc la suite $(g_n'(0))$ est convergente, vers 1. Si le point x n'est pas nul, quand n tend vers l'infini, $g_n'(x) \sim -\dfrac{x^2n^2}{x^4n^4}$ tend vers 0.
La suite de fonctions $(g_n'))$ tend donc simplement vers la fonction g nulle sauf en 0 où elle vaut 1.
Si la suite (g_n') avait une limite uniforme sur $[-1, 1]$, celle-ci serait aussi limite simple, donc serait g, et elle serait aussi continue, donc ne serait pas g. Ceci prouve que la suite (g_n') n'admet pas de limite uniforme.

3) On va utiliser le théorème qui lie dérivation et convergence uniforme. On observe que pour chaque n, $f_n' = g_n$. On sait donc, depuis la première question, que la suite (f_n') est uniformément convergente sur le segment $[-1, 1]$. Par ailleurs on constate que la suite $(f_n(0))$ est la suite nulle ; elle est donc convergente, vers 0. On conclut donc que (f_n) est aussi uniformément convergente sur le segment $[-1, 1]$. On sait en outre que sa limite uniforme f est dérivable, et a pour dérivée la limite uniforme des f_n', c'est-à-dire la fonction nulle. C'est donc que f est constante. On sait par ailleurs depuis peu que $f(0) = 0$, donc c'est la constante nulle et on peut conclure que f_n tend uniformément vers la fonction nulle quand n tend vers l'infini.

Solution de l'exercice 15 :
1) On commence par expliciter la dérivée $f_n'(x) = \dfrac{n^{3/2}}{n^2 + x^2}$. Une fois cette corvée accomplie, on peut sauter l'étape de la convergence simple ici, la limite simple étant très facile à deviner. On pose directement $M_n = \|f_n' - 0\|_\infty = \|f_n' - 0\|_\infty$ qu'on calcule sans mal après avoir observé que f_n' est paire, décroissante sur $[0, +\infty[$ et à valeurs positives, et donc que $M_n = f_n'(0) = n^{-1/2}$. Une fois ce calcul effectué, on fait tendre n vers l'infini, on constate que M_n tend vers zéro et on conclut à la convergence uniforme de la suite (f_n') vers la fonction nulle.

2) Soit B un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$. On peut donc trouver un segment $[-M, M]$ qui contienne l'ensemble B. Sur ce segment, la suite de fonctions $(f'n)$ est uniformément convergente (vers la fonction nulle). De plus la suite $(f_n(0))$ est la suite nulle, donc converge vers zéro. On peut donc en déduire que (f_n) est uniformément

convergente, vers une primitive de la fonction nulle qui s'annule en zéro, donc vers zéro, sur le segment $[-M, M]$ et a fortiori sur l'ensemble B.

3) Si la suite (f_n) convergeait uniformément, ce serait vers sa limite simple, c'est-à-dire vers $f = 0$ au vu de la question 2. Mais la limite de f_n en $+\infty$ est $\frac{\sqrt{n\pi}}{2}$ et ne tend elle pas du tout vers la limite de f. Ceci exclut la convergence uniforme.

Solution de l'exercice 16 :
1) Une occasion d'écrire des epsilon ! Profitons-en.
Soit ϵ strictement positif. Comme la fonction f est continue et la suite (x_n) converge vers x, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$. On peut donc prendre un entier N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$ on ait la majoration $|f(x_n) - f(x)| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$.
Par ailleurs, la suite (f_n) tend uniformément vers f. On peut donc prendre un N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$ on ait la majoration $\|f_n - f\|_\infty \leq \dfrac{\epsilon}{2}$.

Posons alors $N = \mathrm{Max}(N_1, N_2)$. Quand n est plus grand que N, il est à la fois plus grand que N_1 et que N_2 et on obtient la majoration suivante :

$$\begin{aligned}|f_n(x_n) - f(x)| = |(f_n(x_n) - f(x_n)) + (f(x_n) - f(x))| &\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &\leq \|f_n - f\|_\infty + |f(x_n) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

Ceci montre bien la convergence de la suite $(f_n(x_n))$ vers $f(x)$.

2) Supposons que ce soit faux, et introduisons une fonction strictement croissante φ de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ telle que la sous-suite $(g_\varphi(n))$ admette une limite uniforme, qu'on notera f. Observons que f, comme limite uniforme de fonctions continues, est elle-même une fonction continue. Notons par ailleurs $f_n = g_\varphi(n)$ et souvenons-nous que la stricte croissance de φ entraîne, comme d'habitude, que $\varphi(n) \to +\infty$ quand $n \to \infty$.
Pour chaque $n \geq 0$, $f_n(0) = \cos(0\varphi(n)) = \cos(0) = 1$. La convergence uniforme entraînant la convergence simple, $f_n(0)$ tend vers $f(0)$ et donc $f(0) = 1$.
Pour chaque $n \geq 1$, notons $x_n = \dfrac{\pi}{\varphi(n)}$. Par le choix même qu'on a fait pour définir x_n, on constate que pour tout $n \geq 1$, $f_n(x_n) = \cos\left(\varphi(n)\dfrac{\pi}{\varphi(n)}\right) = \cos(\pi) = -1$; comme $\varphi(n)$ tend vers l'infini avec n, on constate par ailleurs que x_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Par la question 1, on sait que $f_n(x_n)$ tend vers $f(0)$, et on conclut que $f(0) = -1$.
Mais cela ne tient pas debout ! La preuve par l'absurde s'achève sur cet amer constat.
3) Effet pervers de l'approche de la fin de la feuille, ma motivation à écrire tous les détails va s'évaporant. Je donnerai seulement quelques indications : on commence comme au 2 avec les mêmes notations, φ, f et f_n. Cette fois on fixe provisoirement deux réels a et b et on écrit -la convergence uniforme l'entraîne- que $\displaystyle\int_a^b f_n$ tend vers $\displaystyle\int_a^b f$ quand n tend vers l'infini. On calcule explicitement l'intégrale de gauche, en obtenant une expression pas très jolie où $\varphi(n)$ figure au dénominateur et, en utilisant là aussi que $\varphi(n)$ tend vers l'infini avec n, on conclut que cette intégrale de gauche tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et donc que $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

On cesse alors de fixer a et b et on sait désormais que l'intégrale de f est nulle sur tout segment. Par ailleurs, encore comme au 2, f est continue comme limite uniforme de fonctions continues. En revenant aux formulations de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue comme différence $F(b) - F(a)$ pour une primitive F, on finit par conclure à la nullité de f.

On recopie alors le paragraphe du 2 où on prouvait sans mal que $f(0)$ valait 1 et on retombe sur une absurdité, cette fois en utilisant des outils disproportionnés à la difficulté de la question (l'existence de primitives pour les fonctions continues n'est pas un théorème si anodin !). Ouf.