

Exercice 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Etudier suivant les valeurs de a la nature de la suite (a^n) .

Exercice 2 : Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $v_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$, $n \in \mathbb{N}$. Etudier suivant les valeurs de a la nature de la suite v_n .

Application : Etudier les suites de terme général

$$u_n = 0,1111111\dots 1 \text{ (n décimales)}$$

$$u_n = 0,3333333\dots 3$$

$$u_n = 0,9999999\dots 9$$

Exercice 3 : Montrer, en utilisant la définition, que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n}{n+1}$ converge vers 1.

Exercice 4 : Montrer que si la suite (u_n) converge vers l alors la suite $(|u_n|)$ converge vers $|l|$.
Réciproque ?

Exercice 5 : Montrer que si (u_n) converge vers l_1 et (v_n) converge vers l_2 alors $(u_n + v_n)$ converge vers $l_1 + l_2$

Exercice 6 : Démontrer que :

* toute suite de réels croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.

* Toute suite de réels décroissante et minorée converge vers sa borne inférieure.

Exercice 7 : Etudier les suites dont le terme général est :

$$u_n = \sqrt[n]{n}; \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \quad u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

Exercice 8 : Etudier par encadrement la suite de terme général $u_n = \sum_{p=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+p}$.

Exercice 9 : Soit $a \in \mathbb{R}$; Soit $u_n = \frac{a^n}{n!}$. Montrer que la suite $(|u_n|)$ est décroissante à partir d'un certain entier n_0 et en conclure que la suite (u_n) converge vers 0 quelque soit a .

Exercice 10 : Soit $u_0 \in [0, \frac{1}{5}]$ et par récurrence $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{4}{25}$.

- Montrer que tous les u_n sont compris entre 0 et $\frac{1}{5}$.
- Montrer que la suite (u_n) est monotone, bornée, convergente et trouver sa limite.
- Reprendre l'étude pour $u_0 \in]\frac{1}{5}, \frac{4}{5}[$, $u_0 = \frac{4}{5}$, $u_0 > \frac{4}{5}$, $u_0 < 0$.

Exercice 11 : Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Soit $u_0 = 0$ et par récurrence $u_{n+1} = \sqrt{a + u_n}$. Montrer que cette suite est définie. Montrer qu'elle est croissante, majorée par $1 + a$ et trouver sa limite.

Exercice 12 : On pose $u_0 = 1$ et par récurrence $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$. Montrer que cette suite est définie, qu'elle est monotone et trouver sa limite.

Exercice 13 : Montrer que la suite (u_n) converge vers l si et seulement si les sous suites (u_{2n+1}) et (u_{2n}) convergent vers l .

Exercice 14 : Soit une suite (u_n) ; on suppose que (u_{2n}) converge vers l_1 , (u_{2n+1}) converge vers l_2 , (u_{3n}) converge vers l_3 . Montrer que $l_1 = l_2 = l_3$ et que (u_n) converge vers cette valeur commune.

Exercice 15 : On pose $u_0 = 1$ et par récurrence $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$. Calculer u_1, u_2, u_3 .

Montrer que $u_n > 1$ pour tout n .

Montrer que la fonction $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Étudier les sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) : on montrera qu'elles sont monotones et que $\forall n, u_{2n} < 2, u_{2n+1} > 2$. Conclure.

Exercice 16 : On pose : $u_0 = 0$ et par récurrence $u_{n+1} = \cos u_n$. Montrer que $\forall n, u_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Étudier les sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) puis conclure.

Exercice 17 : On pose : $u_0 = \frac{1}{2}$ et par récurrence $u_{n+1} = (1 - u_n)^2, n \geq 0$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.

Montrer que la fonction $f(x) = (1-x)^2$ est décroissante sur $[0, 1]$. Étudier les sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) puis conclure.

Suites adjacentes

Exercice 18 : On pose $u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}$; Montrer que ces 2 suites sont adjacentes et convergent vers une limite commune qui est un nombre irrationnel.

Exercice 19 : moyenne arithmético-géométrique : soient $a_0 > 0, b_0 > 0$ donnés et par récurrence

$a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ pour $n \geq 1$. Montrer que $\forall n \geq 1, a_n \leq b_n$ et que ces 2 suites sont adjacentes.

Exercice 20 : On donne 4 réels : $a > b > 0$ et $v_0 > u_0$; on pose par récurrence $\forall n \geq 1$:

$u_n = \frac{au_{n-1} + bv_{n-1}}{a+b}, v_n = \frac{bu_{n-1} + av_{n-1}}{a+b}$; Montrer que ces suites sont adjacentes et trouver leur limite commune à l'aide de $u_n + v_n$.

Exercice 21 : On donne $\alpha > 0, \beta > 0, u_0 = 2, v_0 = 1$ et on pose par récurrence $\forall n \geq 1$:

$u_n = \frac{\alpha u_{n-1} + \beta v_{n-1}}{\alpha + \beta}, v_n = \frac{\alpha u_n + \beta v_{n-1}}{\alpha + \beta}$

a-Montrer $\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} \leq \frac{1}{4}$

b-pour $n \geq 1$ exprimer $u_n - v_n$ en fonction de $u_{n-1} - v_{n-1}$; en déduire que $u_n - v_n = \left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\right)^n$.

c-pour $n \geq 1$ montrer que $v_n - v_{n-1} = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\right)^n$.

d-montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

e-En déduire $\lim u_n = \lim v_n = 1 + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}$ (en exprimant v_n à l'aide de la question c).

Suite de Fibonacci

Exercice 22 : On pose $u_0=1, u_1=2$ et par récurrence $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.

a – Montrer que (u_n) tend vers $+\infty$.

b – Montrer $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^n$.

c – On pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$: déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n^2 - v_n - 1$.

d – Calculer $v_{p+1} - v_p$ puis $v_{p+1} - v_{p-1}$. En déduire l'étude des sous suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) .

e – Montrer que l'on peut en conclure $\lim v_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Suite de Césaro

Exercice 23 : Soit (u_n) une suite qui converge vers l ; montrer que la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} \text{ converge également vers } l.$$

Suites de Cauchy

Exercice 24 : Montrer que la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ n'est pas une suite de Cauchy et qu'elle tend vers $+\infty$.

Exercice 25 : Soient $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos k}{2^k}$ et $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{2^k}$: montrer que ce sont des suites de Cauchy et donc qu'elles convergent vers respectivement vers l_1 et l_2 dans \mathbb{R} .

Par définition, une suite de nombres complexes (z_n) converge vers le complexe $\alpha + i\beta$ si $|z_n - (\alpha + i\beta)|$

tend vers 0 et ceci équivaut à ce que les suites $(\operatorname{Re} z_n)$ et $(\operatorname{Im} z_n - \beta)$ tendent vers 0.

Montrer que la suite $(a_n + ib_n)$ converge, préciser sa limite et en déduire l_1 et l_2 .

Exercice 26 : On donne u_0 et u_1 et on définit par récurrence $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2u_{n-1}}{5}$ pour $n \geq 1$.

- a- Montrer que cette suite est de Cauchy [on calculera $u_{n+1} - u_n$ en fonction de $u_1 - u_0$ puis $u_{n+p} - u_n$ en fonction de $u_1 - u_0$]
- b- Exprimer u_n en fonction de n , u_0 et u_1 et en déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 27 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe k , $0 < k < 1$, qui vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|$$

A partir de u_0 donné, on pose $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a- Montrer que (u_n) est une suite de Cauchy.
- b- En déduire que l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution.