Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023

Analyse IV Durée: 1 heure 30

Session 2 du mercredi 27 juin 2023

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Tous les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Pour $P \in E$, on pose

$$N_1(P) = \int_0^1 |P(t)| \, \mathrm{d}t, \quad N(P) = \int_0^1 \frac{|P(t)|}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad N_\infty(P) = \sup_{t\in[0;1]} |P(t)| \, .$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, justifier la convergence de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$ et montrer que $I_n = \dfrac{2}{2n+1}$.
2. Montrer que N est une norme sur E. On admet que N_1 et N_∞ sont aussi des normes sur E.
3. Montrer que, pour tout $P \in E$, on a :

$$N_1(P) \leq N(P) \leq 2N_\infty(P).$$

4. Étudier la convergence de la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour les normes N_1, N et N_∞.
5. Peut-on en déduire que les normes N et N_∞ ne sont pas équivalentes ? Peut-on en déduire que les normes N et N_1 sont équivalentes ?

Exercice 2. On munit l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la norme définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \|A\| = \sup_{\substack{X\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \|X\|_\infty=1}} \|AX\|_\infty.$$

On admet que cette norme vérifie, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

1. (a) Montrer que la série numérique $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \|H^k\|$ est convergente. On rappelle qu'alors la série matricielle $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} H^k$ est convergente.

   (b) Montrer que $I_2 - H$ est inversible d'inverse $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} H^k$.
2. On note $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$, le groupe des matrices réelles inversibles de taille 2.

   (a) Montrer que l'application déterminant $\det : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) En déduire que $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Montrer, à l'aide de la question 2, que l'application $f : \mathcal{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = A^{-1}$ est différentiable en I_2 et expliciter sa différentielle en I_2.
4. À l'aide de la question précédente, montrer que f est différentiable en A pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et expliciter sa différentielle en A.

Exercice 3. Soient A l'ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant : $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \; ; \; -x^2 \leq y \leq x^2\}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ défini par $f(x,y) = 4x^2 - 2xy + y^2$.

1. Faire un dessin représentant l'ensemble A.
2. Montrer que A est un compact de $\mathbb{R}^2$.
3. Justifier que f admet un maximum et un minimum dans A.
4. Rappeler la définition de l'intérieur de A puis expliciter celui-ci (on ne demande pas de prouver rigoureusement le résultat, juste de décrire l'ensemble).
5. Déterminer les points critiques de f dans l'intérieur de A.
6. Étudier les variations de f sur la frontière de A.
7. Déduire de ce qui précède le maximum et le minimum de f dans A et donner l'ensemble des points où il sont atteints.

Exercice 4. Dans cet exercice on note :

$$f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$
$$G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R},$$
$$H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \text{ pour } x \in]0,+\infty[.$$

1. Justifier pourquoi la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ la fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, +\infty[$, puis en déduire que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
4. Justifier que la fonction H est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x > 0$ elle vérifie l'identité :

$$H''(x) + H(x) = \frac{1}{x}.$$

Correction de la session 2 d'analyse iv du 27 juin 2023