Examen final du lundi 27 juin 2022

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Tous les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Question de cours : Énoncer avec précision le théorème de dérivabilité pour les séries de fonctions.

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'application $u_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{2^n}$$

et on s'intéresse dans cet exercice à la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.

1. Montrer que le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$ est $D = [-1; 1[$.
2. Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur D.
3. Soit $a \in]0; 1[$, montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a; a]$.
4. On note S la fonction somme de la série de fonctions $\sum u_n$. Montrer que S est continue sur $]-1; 1[$.
5. (a) Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[-1; 0]$.

   (b) Que peut-on en déduire sur $\lim\limits_{x\to -1^+} S(x)$?

Exercice 2. On considère la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{4n}}{7^{2n+1}(2n+1)!}$.

1. Déterminer son rayon de convergence, noté R.
2. Préciser le domaine de convergence D de cette série entière et expliciter la valeur de sa somme sur D.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ et l'application

$$\begin{array}{rccl} N & : & E & \to & \mathbb{R} \\ & & P & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |P'(k)| + |P(0)| \end{array}$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Soit

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & E & \to & \mathbb{R} \\ & & P & \mapsto & \displaystyle\int_1^2 P(t)dt \end{array}$$

   L'application φ est-elle continue sur E ?

Exercice 4. Soit $n \geq 1$. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère l'ensemble suivant :

$$\mathcal{A} = \{M \in E \mid \det(M) = 1\}.$$

1. Justifier la continuité de l'application déterminant $\det : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sur E.
2. L'ensemble $\mathcal{A}$ est-il un fermé de E ?
3. L'ensemble $\mathcal{A}$ est-il un ouvert de E ?
4. Montrer que $\mathcal{A}$ n'est pas un compact de E.

Exercice 5. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses : on donnera une démonstration si l'on veut prouver que l'assertion est vraie, et un contre-exemple si on veut prouver que l'assertion est fausse.

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $r > 0$. Si f est développable en série entière sur $]-r;r[$, la fonction $g : x \longmapsto f(x^2)$ est développable en série entière sur $]-\sqrt{r};\sqrt{r}[$.
2. L'image réciproque d'un ensemble compact par une fonction continue est un compact.
3. L'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+3y, x-y, 5y) \end{array}$$

est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{d}f(x,y)(h,k) = (2h+3k, h-k, 5k).$$

Correction de la 2ème session d'analyse IV du 27 juin 2022

Correction de l'exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{(-1)^n}{2^n}$ est une série géométrique de raison $\frac{-1}{2}$ avec $\left|\frac{-1}{2}\right| < 1$, donc elle est convergente. On en déduit que la nature de la série $\sum u_n(x)$ est la même que celle de la série $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ (cf ci-dessous)

   Si $x \in]-1;1[$, alors $\left|\frac{x^n}{\sqrt{n}}\right| \leq |x|^n$ et la convergence de la série géométrique $\sum |x|^n$ entraîne celle de la série $\sum \left|\frac{x^n}{\sqrt{n}}\right|$ par comparaison de séries à termes positifs. Ainsi, la série $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ converge absolument donc converge, et par suite, il en est de même de la série $\sum u_n(x)$ (son terme général étant la somme des termes généraux de deux séries convergentes).

   Si $|x| > 1$, alors par inégalité triangulaire inversée,

   $$|u_n(x)| \geq \frac{|x|^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \neq 0$$

   par croissances comparées d'où la divergence grossière de la série $\sum u_n(x)$ puisque $u_n(x)$ ne tend pas vers 0.

   Si $x = 1$, alors la série $\sum u_n(x) = \sum \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{2^n}\right)$ diverge puisque son terme général est la somme du terme général d'une série divergente par la règle de Riemann (en effet, $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$ avec $\frac{1}{2} \leq 1$), et d'une série convergente.

   Si $x = -1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{2^n}$. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$, la série $\sum v_n$ est une série alternée vérifiant $|v_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissante (par croissance de $\sqrt{\ }$ sur $\mathbb{R}^+$ et décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$), le critère des séries alternées démontre la convergence de la série $\sum v_n$. Ainsi, la série $\sum u_n(x)$ converge pour $x = -1$. Le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$ est donc $D = [-1;1[$.

2. Si la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait normalement sur D, elle convergerait absolument simplement sur D. En particulier, la série $\sum |u_n(-1)|$ convergerait. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$|u_n(-1)| = \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{2^n}\right| = \left|(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n}.$$

   Comme la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente et que la série $\sum \frac{1}{2^n}$ est convergente (série géométrique de raison 1/2), la série $\sum |u_n(-1)|$ diverge, ce qui est contradictoire. On en déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur D.

3. Pour tout $x \in [-a;a]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$|u_n(x)| \leq \left|\frac{x^n}{\sqrt{n}}\right| + \left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right| = \frac{|x|^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n} \leq \frac{a^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n} := w_n(a)$$

   car $-a \leq x \leq a$ entraîne $0 \leq |x| \leq a$, et par croissance de $t \longmapsto t^n$ sur $[0;a]$. Ainsi, la fonction u_n est bornée sur le segment $[-a;a]$. De plus, comme la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit majorant de cet ensemble, l'inégalité précédente entraîne

   $$\|u_n\|_{\infty,[-a;a]} = \sup_{x\in[-a;a]} |u_n(x)| \leq w_n(a).$$

On démontre comme dans la question 1 que la série $\sum w_n(a)$ converge, et on en déduit par comparaison de séries à termes positifs que la série $\sum \|u_n\|_{\infty;[-a;a]}$ converge, ce qui achève de démontrer la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[-a;a]$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur $]-1;1[$. De plus, la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]-1;1[$ puisque tout segment $[b;c] \subset]-1;1[$ peut être inclus dans un segment de la forme $[-a;a]$ avec $a \in]0;1[$. Par le corollaire du théorème de continuité, la somme S de la série de fonctions $\sum u_n$ est continue sur $]-1;1[$.

5. (a) Soit $x \in [-1;0]$, on peut écrire $x = -|x|$ avec $|x| \in [0;1]$. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n(x) = (-1)^n \left(\frac{|x|^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n} \right) = (-1)^n w_n(x) \quad \text{ avec } w_n(x) = \frac{|x|^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n} \geq 0.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq |u_n(x)| = w_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc la suite $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Enfin, pour tout $n \geq 1$,

$$|u_{n+1}(x)| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n} = |u_n(x)|$$

donc la suite $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. La série numérique $\sum u_n(x)$ vérifie donc le critère des séries alternées. En notant $R_n(x)$ son reste d'ordre n, on en déduit que : pour tout $x \in [-1;0]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

La majoration étant indépendante de x, on en déduit que la fonction R_n est bornée sur $[-1;0]$ et

$$0 \leq \|R_n\|_{\infty;[-1;0]} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci permet de conclure que la suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-1;0]$ et prouve la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[-1;0]$.

(b) Le point -1 est adhérent à $[-1;0]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n admet une limite finie quand x tend vers -1, à savoir $u_n(-1) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{(-1)^n}{2^n}$. La convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[-1;0]$ démontrée à la question précédente permet alors d'utiliser le théorème de la double limite pour démontrer que S admet une limite finie lorsque $x \to -1^+$ et

$$\lim_{x\to-1^+} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to-1^+} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n} \right).$$

On aurait aussi pu utiliser le théorème de continuité : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur $[-1;0]$, et la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[-1;0]$, donc sa fonction somme S est continue sur $[-1;0]$. En particulier,

$$\lim_{x\to-1^+} S(x) = S(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n} \right).$$

Correction de l'exercice 2

1. Il s'agit d'une série lacunaire.
   - **Méthode 1 :** On peut poser $a_n = \dfrac{1}{7^{2n+1}(2n+1)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le rayon de convergence noté R' de la série entière $\sum a_n x^n$, avec la règle de d'Alembert pour les séries entières par exemple, puis démontrer que $R = (R')^{1/4}$ par double inégalités.
   - **Méthode 2 :** Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{x^{4n}}{7^{2n+1}(2n+1)!}$. Si $x \neq 0$, alors $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|x|^{4(n+1)}}{7^{2(n+1)+1}(2(n+1)+1)!}\frac{7^{2n+1}(2n+1)!}{|x|^{4n}} = \frac{|x|^4}{7^2(2n+3)(2n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

   Par la règle de D'Alembert pour les séries numériques, la série $\sum u_n = \sum \dfrac{x^{4n}}{7^{2n+1}(2n+1)!}$ converge absolument, donc converge, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ (vrai aussi en 0 mais inutile de le vérifier). Par suite, le rayon de convergence R est égal à $+\infty$ (par le cours, on a $R \geq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ donc $R = +\infty$).

2. Comme $R = +\infty$, le cours donne directement que le domaine de convergence D est égal à $\mathbb{R}$. On se ramène aux développements en séries entières usuels pour calculer explicitement sa somme sur D. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors si $x \neq 0$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{7^{2n+1}(2n+1)!} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x^2/7)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{sh}\left(\frac{x^2}{7}\right)$$

puisque pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Si $x = 0$, les égalités $0^n = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $0^0 = 1$ donnent

$$S(0) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{0^{4n}}{7^{2n+1}(2n+1)!} = \frac{1}{7}.$$

Correction de l'exercice 3

1. On a pour tout $P \in E$, $0 \leq N(P) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |P'(k)| + |P(0)| < +\infty$ car somme finie de réels positifs. N est bien donc une application à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

   i) Séparation :

$$\begin{aligned} N(P) = 0 &\iff \sum_{k=1}^{n}|P'(k)| + |P(0)| = 0 \\ &\iff \sum_{k=1}^{n}|P'(k)| = 0 \text{ et } |P(0)| = 0 \\ &\iff P(0) = 0 \text{ et } \forall k = 1, ..., n,\ P'(k) = 0 \\ &\iff P' = 0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]} \text{ et} P(0) = 0 \\ &\iff P = C,\ C \in \mathbb{R} \text{ et } P(0) = 0 \\ &\iff P = 0_E \end{aligned}$$

   où on a utilisé le fait qu'une somme de réels positifs est nulle si chacun de ces réels est nul. On a aussi utilisé dans la quatrième équivalence le fait que P' est un polynôme de degré $n-1$ qui admet d'après la 3ème équivalence n racines réelles ce qui n'est possible que si P' est le polynôme nul.

ii) Homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $P \in E$,

$$\begin{aligned} N(\lambda P) &= \sum_{k=1}^{n} |(\lambda P)'(k)| + |(\lambda P)(0)| \\ &= \sum_{k=1}^{n} |\lambda P'(k)| + |\lambda P(0)| \\ &= |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |P'(k)| + |\lambda||P(0)| \\ &= |\lambda| N(P). \end{aligned}$$

iii) Inégalité triangulaire : Soient $P, Q \in E$. D'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} N(P+Q) &= \sum_{k=1}^{n} |(P+Q)'(k)| + |(P+Q)(0)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} (|(P'(k)| + |Q'(k)|) + |P(0)| + |Q(0)| \\ &= \sum_{k=1}^{n} |P'(k)| + |P(0)| + \sum_{k=1}^{n} |Q'(k)| + |Q(0)| \\ &= N(P) + N(Q) \end{aligned}$$

Par suite, N est une norme sur E.

2. φ est une application (forme) linéaire sur E d'après la linéarité de l'intégrale. En effet, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall P$, $Q \in E$,

$$\varphi(\alpha P + Q) = \int_1^2 (\alpha P + Q)(t) dt = \alpha \int_1^2 P(t) dt + \int_1^2 Q(t) dt = \alpha \varphi(P) + \varphi(Q).$$

Comme E est de dimension finie ($= n+1$), et φ est une application linéaire définie sur E, on déduit alors que φ est continue.

Correction de l'exercice 4 Comme E est de dimension finie ($= n^2$), toutes les normes sont deux à deux équivalentes et on peut donc travailler avec la norme qu'on veut. On va travailler avec la norme infinie.

1. L'application det est continue sur E car c'est une application polynomiale en les coefficients.
2. L'ensemble $\mathcal{A} = \det^{-1}(\{1\})$ est un fermé de E car image réciproque par l'application det continue sur E de $\{1\}$ fermé de $\mathbb{R}$ car singleton.
3. L'identité I_n appartient à $\mathcal{A}$. Soit $r > 0$. La matrice diagonale

$$M_r = I_n + \operatorname{diag}\left(\frac{r}{2}, 0, \ldots, 0\right)$$

appartient à la boule de centre I_n et de rayon r pour la norme infinie puisque

$$\|M_r - I_n\|_\infty = \left\|\operatorname{diag}\left(\frac{r}{2}, 0, \ldots, 0\right)\right\|_\infty = \frac{r}{2} < r.$$

Or cette matrice est de déterminant $1 + \frac{r}{2} \neq 1$, donc $M_r \notin \mathcal{A}$. On vient donc de montrer que pour tout réel $r > 0$, $B(I_n, r)$ n'est pas incluse dans $\mathcal{A}$, ce qui permet de conclure que $\mathcal{A}$ n'est pas un fermé de E.

On aurait aussi pu démontrer que le complémentaire de $\mathcal{A}$ dans E n'est pas fermé en utilisant la caractérisation séquentielle des fermés et en construisant une suite d'éléments du complémentaire convergeant vers un élément de $\mathcal{A}$.

4. $\mathcal{A}$ n'est pas un compact de E car pas borné. En effet, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, prenons $D_k = \text{diag}(k, \frac{1}{k}, 1, ..., 1) \in \mathcal{A}$ car $\det(A_k) = k \times \frac{1}{k} \times 1 \times ... \times 1 = 1$ et
$$\|D_k\|_\infty = \max(k, \frac{1}{k}, 1, 0) = k \underset{k \to +\infty}{\to} +\infty.$$
Par suite, $\mathcal{A}$ n'est pas borné dans E et n'est donc pas un compact de E.

Correction de l'exercice 5

1. VRAIE : Si f est développable en série entière sur $]-r; r[$, il existe une série entière $\sum a_n x^n$ (avec $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe) de rayon de convergence $R \geq r$ vérifiant :
$$\forall x \in]-r; r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$
Pour tout $x \in]-\sqrt{r}; \sqrt{r}[$, on a alors $x^2 \in [0; r[\subset]-r; r[$, et ainsi
$$g(x) = f(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p x^p$$
où $b_p = 0$ si p est impair, et $b_p = a_n$ si $p = 2n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Par suite, g s'écrit comme la somme d'une série entière sur $]-\sqrt{r}; \sqrt{r}[$ (avec $\sqrt{r} > 0$), donc g est développable en série entière sur $]-\sqrt{r}; \sqrt{r}[$.
2. FAUSSE : Prenons la fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée $\widetilde{0}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Le singleton $\{0\}$ est un compact de $\mathbb{R}$, puisque c'est un ensemble fermé (car il s'agit d'un singleton) et borné (car pour tout $x \in \{0\}$, $|x| \leq 0$) dans l'espace $\mathbb{R}$ qui est de dimension finie. L'image réciproque de $\{0\}$ par la fonction nulle est
$$\widetilde{0}^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid \widetilde{0}(x) = 0\} = \mathbb{R}$$
qui n'est pas un compact car l'ensemble n'est pas borné (il ne peut pas exister de $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|x| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).
3. VRAIE : l'application f est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ (en effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tous $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, $f(\lambda(x, y) + (x', y')) = \lambda f(x, y) + f(x', y')$). Par le cours, f est donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et sa différentielle en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ est égale à f elle-même.