

Définition 1

Une **suite numérique** est une fonction de \mathbb{N} (ou de $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$ pour $n_0 \in \mathbb{N}$) dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pour une suite réelle ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ pour une suite complexe. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou $(u_n)_{n \geq n_0}$) la suite de terme général u_n .

Définition 2

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique. On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k.$$

On note cette série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ ou $\sum u_n$. Pour $n \geq n_0$, le terme S_n est appelé la **somme partielle** de rang n de cette série.

Définition 3

La série numérique de terme général u_n est **convergente** lorsque la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n \geq n_0}$ converge, c'est-à-dire lorsqu'il existe $S \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^n u_k = S.$$

Cette limite S est appelée la **somme** de la série et est notée :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = S.$$

En cas de convergence, on note pour tout $n \geq n_0$:

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

le **reste** d'ordre n de la série.

Définition 4

Une série non convergente est dite **divergente**. La **nature** d'une série est sa convergence ou sa divergence.

Proposition 5

Si la série $\sum u_n$ converge, la suite des restes $(R_n)_n$ converge vers 0.

Proposition 6

Une **série télescopique** est une série dont le terme général est de la forme $u_{n+1} - u_n$ pour une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - u_0.$$

Proposition 7 (Condition nécessaire de convergence d'une série)

Si la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Définition 8

Si la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors on dit que la série de terme général u_n **diverge grossièrement**.

Proposition 9 (Opérations sur les séries)

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques convergentes. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la série numérique

$\sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda u_n + v_n)$ converge. De plus, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Corollaire 10

Si $\sum u_n$ est une série numérique convergente et $\sum v_n$ une série numérique divergente, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ est une série divergente.

Théorème 11 (Convergence des séries à termes positifs)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs. Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée, c'est-à-dire si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^n u_k \leq M$.

De plus, si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge, alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^n u_k \right)$.

Corollaire 12 (Comparaison de séries à termes positifs)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs tels que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(i) Si la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.

(ii) Si la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ diverge.

Corollaire 13

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs. On suppose que $u_n = \mathcal{O}_{+\infty}(v_n)$ (ceci est vrai en particulier si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$), alors :

(i) si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge,

(ii) si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Corollaire 14 (Nature de deux séries équivalentes)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs tels que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$. Alors les séries

$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ ont même nature.

Proposition 15 (Règle de d'Alembert)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique à termes **strictement positifs**. On suppose $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

(i) Si $\ell > 1$, alors la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement.

(ii) Si $\ell < 1$, alors la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.

(iii) Si $\ell = 1$, alors on ne peut rien dire.

Remarque : les extensions des théorèmes ci-dessus au cas où la positivité (respectivement stricte positivité) n'est valable qu'à partir d'un certain rang ont été à chaque fois vues en remarques.

Théorème 16 (Comparaison série-intégrale)

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $f : [p; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue, décroissante, à valeurs positives. Alors la série numérique $\sum f(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_p^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

Proposition 17 (Séries géométriques)

Soit $q \in \mathbb{C}$. La série de terme général q^n converge si et seulement si $|q| < 1$.

Théorème 18 (Séries de Riemann)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la série numérique à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition 19 (Série définissant l'exponentielle)

La série numérique $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge pour tout réel $a \in \mathbb{R}^+$ (en fait pour tout $a \in \mathbb{C}$).

Proposition 20 (Critère de Cauchy pour les séries)

La série numérique $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \varepsilon.$$

Définition 21

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que la série $\sum u_n$ **converge absolument** (ou est absolument convergente) si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 22 (Série absolument convergente)

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série numérique absolument convergente. Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge et de plus :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Définition 23

Une série convergente mais non absolument convergente est dite **semi-convergente**.

Définition 24

Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **alternée** si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n |u_n| \quad \text{ou} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^{n+1} |u_n|.$$

(En d'autres termes, on demande que $(-1)^n u_n$ soit de signe constant, ce qui s'écrit encore $u_{n+1} u_n \leq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

Une série réelle $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est **alternée** si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est.

Théorème 25 (Critère des séries alternées)

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série alternée. Si la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0, alors la série

$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.

De plus, la somme de la série est encadrée par les sommes partielles consécutives.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1} et vérifie :

$$|R_n| \leq |u_{n+1}|.$$

Corollaire 26

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série alternée qui vérifie les hypothèses du critère des séries alternées. Le signe de la somme est celui de son premier terme.

Proposition 27 (Règle d'Abel)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes. On suppose que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, que la série $\sum |v_n - v_{n+1}|$ converge, et que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$

est bornée, c'est-à-dire

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq M,$$

alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

Corollaire 28

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq M,$$

et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **réelle, décroissante**, qui converge vers 0, alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

Théorème 29 (Somme des relations de comparaison)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **réelle à termes positifs**.

1. On suppose que la série $\sum v_n$ **diverge**.

- Si $u_n = \mathcal{O}_{+\infty}(v_n)$, alors $\sum_{k=0}^n u_k = \mathcal{O}_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$.

- Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$, alors $\sum_{k=0}^n u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$.

2. On suppose que la série $\sum v_n$ **converge**.

- Si $u_n = \mathcal{O}_{+\infty}(v_n)$, alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \mathcal{O}_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$.

- Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$, alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$.

Corollaire 30 (Somme des équivalents)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles à **valeurs positives** telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

- Si l'une des deux séries diverge, l'autre diverge aussi et on a l'équivalent :

$$\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n v_k.$$

- Si l'une des deux séries converge, l'autre converge aussi et on a l'équivalent :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

Définition 31

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On appelle **produit de Cauchy** des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série de terme général w_n défini par

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{l=0}^n u_{n-l} v_l.$$

Théorème 32 (Produit de Cauchy)

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors la série produit de Cauchy $\sum w_n$ converge aussi absolument et on a l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$