Feuille exercice n°5
Applications linéaires

Exercice 1 : Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ? Si oui, préciser leur noyau.

$f_1 : \boldsymbol{R^2} \to \boldsymbol{R^2}$: $f_1(x,y) = (2x+y, x-y)$ $\quad$ $f_4 : \boldsymbol{R^2} \to \boldsymbol{R}$: $f_4(x,y) = x^2 + y^2$

$f_2 : \boldsymbol{R^2} \to \boldsymbol{R}$: $f_2(x,y) = x+y$ $\quad$ $f_5 : \boldsymbol{R^3} \to \boldsymbol{R^3}$: $f_5(x,y,z) = (y,z,x)$

$f_3 : \boldsymbol{R^2} \to \boldsymbol{R^3}$: $f_3(x,y) = (x,y,x+y)$ $\quad$ $f_6 : \boldsymbol{R^2} \to \boldsymbol{R^2}$: $f_6(x,y) = (2x+y, -4x-2y)$

Exercice 2 : Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps K et f une application linéaire de E dans F.
Prouver que f(0) = 0.
Démontrer que Ker f est un sous espace vectoriel de E.
Démontrer que Im f est un sous espace vectoriel de F.

Exercice 3 : Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, de base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, et F un K-espace vectoriel quelconque. Soit f une application linéaire de E dans F.
Montrer que Imf = Vect $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$.
Ce résultat est très utile quand on cherche une base de Im f : pourquoi ?

Exercice 4 : Dans chaque cas suivant , déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire E :
1 – E étant un K -EV de base (e_1, e_2, e_3) , g est l'endomorphisme défini par
$g(e_1) = e_1 - e_2$, $g(e_2) = -e_1 + e_2$, $g(e_3) = 0$.
2 - E étant un K -EV de base (e_1, e_2, e_3) , g est l'endomorphisme défini par
$g(e_1) = e_2$, $g(e_2) = e_3$, $g(e_3) = e_1 + e_2$
3 - E étant un K -EV de base (e_1, e_2, e_3, e_4) et F étant un K -EV de base (e'_1, e'_2) , g est l'application linéaire définie par : $g(e_1) = e'_1$, $g(e_2) = e'_1 + e'_2$, $g(e_3) = e'_2$, $g(e_4) = e'_1 - e'_2$

Exercice 5 : Soit $\boldsymbol{R}^4$, muni de sa base canonique. On définit l'application f par :
$f((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) = (4\alpha+2\gamma+4\delta, 0, 2\alpha+\gamma+2\delta, 4\alpha+2\gamma+4\delta)$.
1 – Montrer qu'il s'agit d'un endomorphisme de $\boldsymbol{R}^4$.
2 – Déterminer une base de Im f ; en déduire Dim Ker$f$ puis une base de Ker$f$.
3 – A-t-on $\boldsymbol{R}^4 = Kerf \oplus \mathrm{Im}\, f$?

Exercice 6 : soit E un espace vectoriel de base (e_1, e_2, e_3). On définit l'endomorphisme de E par
$f(e_1) = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$; $f(e_2) = -\frac{1}{2}(e_1 - e_2)$; $f(e_3) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + 2e_3)$;
1 – Calculer $f(x)$ pour x vecteur quelconque de E.
2 – Calculer $fof(x)$.
3 – Montrer que $E = Kerf \oplus \mathrm{Im}\, f$
4 – Comment obtenir une nouvelle base de E , $(a_1, a, , a_3)$, dans laquelle

$$f(a_1) = 0, f(a_2) = a_2 \; , \; f(a_3) = a_3$$

Exercice 7 Pour la fonction f_6 de l'exercice 1,a-t-on $\boldsymbol{R}^2 = Kerf_6 \oplus \mathrm{Im}\, f_6$?