Feuille exercice n°2
Introduction aux espaces vectoriels

Exercice 1 Montrer que si K est un corps , x et y deux éléments de K :
x y = 0 si et seulement si x ou y est nul.
Soit E un espace vectoriel sur le corps K ; soit x$\in E$ et $\lambda \in$ K : montrer que
λ x =0 si et seulement si λ =0 ou x=0.

Quelques définitions indispensables : on note ici E un espace vectoriel défini sur un corps K.

1 -Soient v et w deux éléments de E appelés « vecteurs » et soient $\propto$ et β deux éléments de K appelés « scalaires » : le vecteur αx+βy s'appelle une combinaison linéaire des vecteurs x et y.

2 – Soit F un sous ensemble non vide de E :si toute combinaison linéaire de 2 vecteurs x et y de F reste dans F ,on dit que F est un sous –espace vectoriel de E.

3 – Soit F un sous espace vectoriel de E et v_1,v_2,…,v_n des vecteurs de F tels que Vect(v_1,v_2,…,v_n)=F : on dit que la famille v_1,v_2,…,$v_n$engendre F ou est génératrice de F ou que F est engendré par cette famille.

4 – Soient v_1,v_2,…,v_n des vecteurs de F et $\propto_1$, $\propto_2$,…, $\propto_n$ des scalaires de K :On dit que la famille des vecteurs est libre si et seulement si
$\propto_1 v_1$+$\propto_2 v_2 + \cdots +$$\propto_n v_n = 0$ équivaut à $\propto_1$= $\propto_2$= $\cdots$ =$\propto_n$= 0 .
Une famille qui n'est pas libre est liée.

5 –Soit F un sous-espace vectoriel de E . Soient v_1,v_2,…,v_n des vecteurs de F formant une famille libre et tels que Vect(v_1,v_2,…,v_n)=F .On dira alors que c'est une base de F.
Il est équivalent de dire que tout vecteur de F s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de vecteursv_1,v_2,…,v_n.

Exercice 2 : Parmi les sous-ensembles suivants, déterminer ceux qui sont des sous espaces vectoriels de R^3 :
F_1 = { $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x_1 = 0$} ; F_2 = { $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ } ;
F_3 = { $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ } ; F_4= { $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x_3 = 2x_1 - x_2$}
F_5 = { $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x_1 x_2 x_3 = 0$ } ; F_6 = { $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x_1 = x_2 = x_3$}
Déterminer une base de chaque sous-espace vectoriel.

Exercice 3 : Dans R^3 , on désigne par F le sous –espace vectoriel engendré par les vecteurs v_1=(1,4,-5) et v_2=(1,2,3) : déterminer une base de F.
Le vecteur a =(2,14,-34) appartient-il à F ? le système (v_1, v_2 , a) est-il une base de R^3 ?
Même question avec $b = (0,0,1)$.

Exercice 4: Les familles suivantes sont-elles libres ou liées :
Dans R^2 :((3,2),(4,-1)) ; ((3,2),(4,-1),(5,-2))
Dans R^3 : ((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)) ; ((1,1,0),(0,1,1),(1,2,1))

Exercice 5 : Comment choisir $\propto$ pour que ((3,1,-4,6),(1,1,4,4),(1,0,-4,$\propto$)) soit une famille libre de R^4 ?

Exercice 6 : Soient x,y,z des vecteurs de R^n : on pose u = x+y, v = x+z, w = y+z .
a - Montrer que (x,y,z) est une famille libre si et seulement si (u,v,w) est une famille libre.
b – Montrer que Vect (x,y,z) = Vect (u,v,w).
c – Montrer que (x,y,z) est une base du sous espace –vectoriel F de R^n si et seulement si (u,v,w) est une base de F.

Exercice 7 : Soit (u,v,w) une famille libre de R^n :On note
F={ x ∈ R^n , $\exists(\propto, \beta) \in R \times R$, x = $(\propto + \beta)$ u + $(\propto + 2\beta)$ v + $(\propto + 3\beta)$ w }.
Montrer que F est un sous espace vectoriel de R^n .Les vecteurs u,v et w appartiennent-ils à F ? Donner une base de F.

Exercice 8 : Soit F = { $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$, $x_1 = 2x_2 - x_3$, $x_4 = x_1 + x_2 + x_3$ }
1 - Montrer que F est un sous-espace vectoriel de R^4. En donner une base.
2 – Soit (a=(1,1,1,3),b=(0,1,2,3)) : montrer que cette famille est une nouvelle base de F.
3 – Soit v un vecteur de F : donner ses composantes dans chacune de ces 2 bases.
4 – Soient c=(1,0,1,0) et d=(0,1,0,1) :Montrer que (a,b,c,d) est une base de R^4.
5 – Soit u un vecteur qui s'écrit (x,y,z,t) dans la base canonique de R^4 : comment s'écrit-il dans la base (a,b,c,d) ? Montrer que u s'écrit de façon unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, où G est le sous espace vectoriel engendré par (c,d).

Exercice 9
Dans R^3,on donne les vecteurs u=(1,2,0) , v=(1,1,1) , w=(-1,0,-3) dans la base canonique de R^3.
Montrer que (u,v,w) est une nouvelle base de R^3; Comment s'écrivent les vecteurs u ,v et w dans cette base ?
Soit un vecteur qui s'écrit (1,2,3) dans la base canonique de R^3 : comment s'écrit –t-il dans la nouvelle base ?
Soit un vecteur qui s'écrit (1,2,3) dans la nouvelle base :comment s'écrit-il dans la base canonique de R^3 ?