Feuille exercice n°1

Introduction à l'algèbre linéaire : résolution de systèmes

Retour sur une question de géométrie du CCF :

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé dans lequel les coordonnées sont notées x,y,z.
Soient les droites D et D' définies par :

D : $\begin{cases} x = 2y+1 \\ z = y+4 \end{cases}$ D' : $\begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 9 = 0 \end{cases}$

Déterminer des vecteurs directeurs de D et D'.
Déterminer un vecteur orthogonal à ces 2 vecteurs directeurs . Préciser ceux qui sont de norme 2.

Résolution de systèmes linéaires 2 X 2

On cherche à résoudre les systèmes d'équations qui se présentent sous la forme $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ où les coefficients sont des réels. On verra que ces méthodes peuvent se généraliser à des systèmes n x n .

1 – Discuter du nombre de solutions d'un tel système en interprétant géométriquement le problème.

Combien de solutions pour ces systèmes : $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y = m \\ -4x + 2y = m^2 - 1 \end{cases}$

2 – Montrer que $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} (ab' - a'b)x = cb' - bc' \\ (ab' - a'b)y = ac' - a'c \end{cases}$

Discuter et résoudre.

La quantité $\Delta = ab' - a'b$ s'appelle le déterminant du système .

Dans la suite des calculs, on pose $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$; montrer qu'alors on peut écrire

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$ lorsque $\Delta \neq 0$.

Résoudre : $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y = m \\ -4x + 2y = m^2 - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} (m-3)x + y = m \\ 2x - my = m - 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x\sqrt{3} - y = 1 + \sqrt{3} \\ 5x + y\sqrt{3} = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x \cos\frac{\pi}{3} + y \cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} \\ 2x \sin\frac{\pi}{6} + y \tan\frac{\pi}{3} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 4x + y = 1 \\ x - 5y = m \end{cases}$

3 – Ecriture matricielle :

Définition de la notion de matrice 2x2 : nous appellerons matrice à 2 lignes et 2 colonnes le tableau $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a,b,c,d sont des nombres réels (ou complexes ou…).

Opérations :

*Nous pourrons additionner ces matrices entre elles suivant la loi :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ c+\gamma & d+\delta \end{pmatrix}$$

*Nous pourrons les multiplier par un nombre (scalaire) suivant la loi : $\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$

*Nous pourrons aussi les multiplier entre elles suivant la loi :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix};$$

Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$: que conclure ici ?

On peut aussi en suivant la même règle faire agir une matrice sur un vecteur X=$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de R² :

A X = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$. Remarquons que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: cette matrice s'appelle la matrice unité ou matrice identité.

Que dire des matrices suivantes en terme de géométrie de R² :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\ ?$$

Revenons à notre système : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$: en utilisant l'écriture matricielle, il s'écrit AX =Y avec A = $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$, X =$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, Y = $\begin{pmatrix} c \\ c\prime \end{pmatrix}$.

Or on sait résoudre dans R une équation du type ax=b : si a$\neq 0$, on peut multiplier les 2 membres de cette equation par1/a et (1/a) a x=(1/a) b ou x= b/a. Si a =0 ,pas de solution pour b$\neq 0$ et une infinité de solutions si b=0.

Procédons par analogie : si $\Delta = ab' - a'b \neq 0$, posons B =$\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix}$ .Que dire de AB ? BA ?

En déduire la résolution du système.

Résoudre par cette méthode $\begin{cases} 2x+3y=9 \\ x-y=2 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} (m-3)x+y=m \\ 2x-my=m-2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3f' - 6g' = e^x \\ 5f' + 2g' = sinx \end{cases}$$ où f et g sont des fonctions dérivables à calculer.

4 – Méthode du pivot de Gauss :

C'est un algorithme qui permet de résoudre un système en le remplaçant par un système équivalent mais dont la matrice est triangulaire. Il est basé sur le fait que ce système ne change pas si on multiplie une ligne par une constante non nulle ,si on remplace la ligne L_2 par$L_2 - L_1$ ou si on change l'ordre des lignes.

Résoudre :

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 13\,x + y = 1 \\ x - 5y = m \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 6 \\ 3x + 4y + mz = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2a \\ y + z = 2b \\ z + x = 2c \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2a \\ y + z = 2b \\ z + t = 2c \\ t + x = 2d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + t = 2 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$ Variante : mettre 4 à la place de 5 dans L4

<u>Bases de R², bases d'un plan</u>

Prenons 2 vecteurs non colinéaires (donc non nuls) du plan : montrer que c'est une base du plan c'est-à-dire que tout vecteur du plan s'écrit comme une combinaison linéaire de ces 2 vecteurs et ceci de façon unique.

Pourquoi ceci n'est-il plus vrai si on prend 1 vecteur ? si on prend 3 vecteurs ?

Donc toute base du plan (ou de R²) est constituée de 2 vecteurs .C'est pourquoi on dira que le plan est un espace de dimension 2.

Donner une base du plan d'équation x-2y+4z=0 ; quelles sont les coordonnées d'un vecteur du plan dans cette base ?