- Théorèmes à connaître avec leur démonstration

  1. **Lemme d'Abel.** S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite complexe $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors quel que soit $z \in \mathbb{C}$ de *module* $|z| < |z_0|$, la *série numérique* $\sum a_n z^n$ *converge absolument*.

  - Si R est le *rayon de convergence* d'une *série entière* $\sum a_n z^n$, si $|z| < R$ alors la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument, si $|z| > R$ alors la série numérique $\sum a_n z^n$ *diverge grossièrement*.

  2. Le rayon de convergence de la *série somme de deux séries entières* est supérieur ou égal au plus petit de leurs rayons de convergence. La somme de la série somme de deux séries entières coïncide avec la somme de leurs sommes sur le plus petit des deux disques de convergence.
  3. La *série produit* de deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ absolument convergentes est absolument convergente.
  4. Le rayon de convergence de la *série produit de deux séries entières* est supérieur ou égal au plus petit de leurs rayons de convergence.
  5. Une série entière *converge normalement* et donc *uniformément* sur tout *compact* inclus dans son *disque de convergence*.
  6. La somme d'une série entière est *continue* dans son disque de convergence.
  7. La somme d'une série entière de rayon de convergence non nul admet un *développement limité* en zéro à tout *ordre*.

- Théorèmes à connaître sans leur démonstration

  1. **Règle de d'Alembert.** Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang N, et si la suite $(|a_{n+1}/a_n|)_{n\geq N}$ a pour limite $\ell \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à $1/\ell$, où par convention $1/+\infty = 0$, $1/0 = +\infty$.
  2. **Règle de Cauchy.** Si la suite $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\ell \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à $1/\ell$.
  3. Le rayon de convergence d'une série entière et de sa *série dérivée* sont égaux.
  4. La somme de la série produit de deux séries numériques absolument convergentes est égale au produit de leurs sommes.
  5. La somme de la série produit de deux séries entières coïncide avec le produit de leurs sommes sur le plus petit des deux disques de convergence.

NB: La définition des notions en *italique* fait partie des connaissances à avoir.