- Théorèmes à connaître avec leur démonstration

1. Si F est un sous-ensemble d'un *espace vectoriel normé* E, d'*adhérence* $\overline{F}$, on a les équivalences suivantes, pour $g \in E$:

$$g \in \overline{F} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists f \in F\,;\ \|g - f\| \le \varepsilon) \Leftrightarrow (\exists (f_n) \in F^{\mathbb{N}}\,;\ \lim(f_n) = g)$$

   (Si $\overline{F} = E$ on dit que F est *dense* dans E.)

2. Une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes est *uniformément convergente* si et seulement si elle vérifie le *critère de Cauchy uniforme*.
3. La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est *continue*.
4. L'espace des fonctions (à valeurs réelles ou complexes) continues sur un *segment*, muni de la *norme du sup*, est *complet*.
5. La convergence uniforme sur un segment implique la *convergence en moyenne quadratique* sur ce segment, et la convergence en moyenne quadratique sur un segment implique la *convergence en moyenne* sur ce segment.
6. Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur un *intervalle* I, convergeant uniformément sur tout *compact* de I vers f, si $a \in I$, alors la suite (F_n) des primitives

$$F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

   converge uniformément sur tout compact de I vers la *primitive* $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

7. Toute fonction *continue par morceaux* sur un segment est limite uniforme d'une suite de *fonctions en escalier* sur ce segment.
   (Démonstration en faisant appel à 1), et 8) 9) ci-dessous.)

- Théorèmes à connaître sans leur démonstration

8. Toute fonction continue par morceaux sur un segment peut s'écrire comme la somme d'une fonction continue et d'une fonction en escalier.
9. Toute fonction continue sur un segment est *uniformément continue* sur ce segment.
10. **Théorème de convergence dominée :** Soit (f_n) une suite de fonctions (à valeurs réelles ou complexes) continues par morceaux sur un intervalle I, *convergeant simplement* vers une fonction continue par morceaux f. On suppose de plus qu'il existe une fonction g continue par morceaux et *intégrable* (c'est-à-dire que $\int_I |g| < +\infty$) telle que

$$\forall x \in I\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ |f_n(x)| \le |g(x)|\,.$$

   Alors f est intégrable et

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I f\,.$$

11. **Théorème de dérivation :** Soit (g_n) une suite de fonctions *de classe $\mathscr{C}^1$* sur un intervalle I (à valeurs réelles ou complexes), convergeant en au moins un point de I et telle que la suite des fonctions dérivées (g_n') converge uniformément sur tout compact de I vers une fonction f. Alors la suite (g_n) converge uniformément sur tout compact de I vers une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ dont la *dérivée* est f.
12. **Théorème de Weierstrass :** Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de *fonctions polynomiales*.

NB: La définition des notions en *italique* fait partie des connaissances à avoir.