**Définition 1.** *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle évaluation de $P$ en $u$ ou valeur de $P$ en $u$ l'endomorphisme $P(u) \in \mathcal{L}(E)$ défini par*

$$P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k = a_d u^d + \cdots + a_1 u + a_0 \operatorname{Id}_E \qquad \text{où} \qquad u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}.$$

**Proposition 1.** *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors*

$$(\lambda P + Q)(u) = \lambda P(u) + Q(u) \quad \text{et} \quad (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u).$$

**Définition 2.** *On dit que $v \in \mathcal{L}(E)$ est un polynôme en $u \in \mathcal{L}(E)$ s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $v = P(u)$. On note $\mathbb{K}[u]$ l'ensemble des polynômes en $u$ :*

$$\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

**Proposition 2.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble $\mathbb{K}[u]$ est stable par addition, composition et multiplication par un scalaire. De plus, pour tout $v, w \in \mathbb{K}[u]$, on a $v \circ w = w \circ v$.*

**Définition 3.** *On appelle polynôme annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$ tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.*

**Théorème 1.** *Les valeurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ figurent parmi les racines des polynômes annulateurs de $u$. Autrement dit, si $P \in \mathbb{K}[X]$ est annulateur de $u$, alors*

$$\operatorname{Sp}(u) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \mid P(\lambda) = 0\}.$$

**Théorème 2** (Théorème de Cayley-Hamilton)**.** *Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de $u$, $\chi_u$, est annulateur de $u$, i.e. $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.*

**Définition 4.** *Soient $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle évaluation de $P$ en $A$ (ou valeur de $P$ en $A$) la matrice*

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = a_d A^d + \cdots + a_1 A + a_0 I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

**Proposition 3.** *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors*

$$(\lambda P + Q)(A) = \lambda P(A) + Q(A) \quad \text{et} \quad (PQ)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$$

**Définition 5.** *On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un polynôme en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $M = P(A)$. On note*

$$\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$$

*l'ensemble des polynômes en $A$. Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par multiplication matricielle.*

**Définition 6.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme annulateur de $A$ tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.*

**Proposition 4.** *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $A$ et $B$ sont semblables, alors $A$ et $B$ ont les mêmes polynômes annulateurs.*

**Théorème 3.** *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $P$ est un polynôme annulateur de $A$, alors le spectre de $A$ est inclus dans l'ensemble des racines de $P$ (dans $\mathbb{K}$).*

**Théorème 4** (Théorème de Cayley-Hamilton (version matricielle))**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de $A$, $\chi_A$, est annulateur de $A$, i.e. $\chi_A(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.*

Dans la suite, $E$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

**Proposition 5.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique polynôme $\Pi_u \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant :*

$(i)$. *$\Pi_u$ est annulateur de $u$,*

$(ii)$. *$\Pi_u$ est unitaire,*

$(iii)$. *pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul annulateur de $u$,* $\deg(\Pi_u) \leq \deg(P)$.

*Ce polynôme $\Pi_u$ est appelé polynôme minimal de l'endomorphisme $u$.*
*Cet énoncé se transpose aux matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ permettant de définir le polynôme minimal $\Pi_A$.*

**Corollaire 1.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme minimal de $u$ divise tout polynôme annulateur de $u$, i.e.*

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \Rightarrow \Pi_u \mid P.$$

**Théorème 5.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres de $u$ sont exactement les racines (dans $\mathbb{K}$) de son polynôme minimal $\Pi_u$. Ce résultat se transpose aux matrices carrées.*

**Lemme 1** (Lemme des noyaux)**.** *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Si $P$ et $Q$ sont premiers entre eux, alors*

$$\operatorname{Ker}\left((PQ)(u)\right) = \operatorname{Ker}(P(u)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(u)).$$

**Corollaire 2.** *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{K}[X]$. Si les polynômes $P_1, \ldots, P_m$ sont deux à deux premiers entre eux, alors*

$$\operatorname{Ker}\left(\left(\prod_{k=1}^{m} P_k\right)(u)\right) = \bigoplus_{k=1}^{m} \operatorname{Ker}(P_k(u)).$$

*Ce résultat se transpose aux matrices carrées $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ :*

$$\operatorname{Ker}\left(\left(\prod_{k=1}^{m} P_k\right)(A)\right) = \bigoplus_{k=1}^{m} \operatorname{Ker}(P_k(A)).$$

**Théorème 6.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :*

$(i)$. *$u$ est diagonalisable,*

$(ii)$. *il existe un polynôme annulateur de $u$ scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$,*

$(iii)$. *le polynôme minimal de $u$, $\Pi_u$, est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.*

*Ce résultat se transpose aux matrices carrées.*

**Proposition 6.** *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$.*

1. *Le sous-espace $F$ est stable par tout polynôme en $u$ et*

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad P(u)_F = P(u_F).$$

2. *Le polynôme minimal de $u_F$ divise le polynôme minimal de $u$, i.e. $\Pi_{u_F} \mid \Pi_u$.*

**Théorème 7.** *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, et si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$, alors l'endomorphisme induit $u_F$ est aussi diagonalisable.*

**Proposition 7.** *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables. Si $u$ et $v$ commutent, alors il existe une base de $E$ qui diagonalise $u$ et $v$ en même temps. Une telle base est appelée base de codiagonalisation de $u$ et $v$.*

**Corollaire 3.** *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices diagonalisables. Si $AB = BA$, alors il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont toutes deux diagonales.*

**Théorème 8.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :*

1. *$u$ est trigonalisable,*
2. *il existe un polynôme annulateur de $u$ scindé dans $\mathbb{K}[X]$,*
3. *le polynôme minimal $\Pi_u$ de $u$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.*

**Corollaire 4.** *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable, alors $A$ est semblable à une matrice diagonale par blocs où chaque bloc diagonal est de la forme $\lambda I_d + N$ avec $N$ une matrice nilpotente.*

**Corollaire 5.** *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable et $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$, alors l'endomorphisme induit $u_F$ est trigonalisable.*