

Définition 1. On appelle série de fonctions de terme général f_n la suite de fonctions $(S_n)_{n \geq n_0}$ définie par

$$\forall n \geq n_0, \quad S_n = \sum_{k=n_0}^n f_k.$$

Cette série de fonctions est notée $\sum_{n \geq n_0} f_n$ et pour $n \geq 0$, S_n est appelée somme partielle de rang n de celle-ci.

Définition 2. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement** sur $A \subset D$ si la suite de fonctions $(S_n)_n$ de ses sommes partielles converge simplement sur A vers une certaine fonction S . Cette fonction S est appelée somme de la série de fonctions et notée $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Théorème 1. Soit $A \subset D$. On a équivalence entre :

(i). la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur A ,

(ii). pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.

De plus, si tel est le cas, on a :

$$\forall x \in A, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) (x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Proposition 1. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $A \subset D$, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur A .

Définition 3. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $A \subset D$, alors on peut introduire son reste de rang n , $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$, défini par $R_n : x \in A \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

Proposition 2. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $A \subset D$, alors sa somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S = S_n + R_n$ et la suite de fonctions $(R_n)_n$ des restes converge simplement sur A vers la fonction nulle.

Définition 4. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument simplement sur $A \subset D$ si la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge simplement sur A , autrement dit, si pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum |f_n(x)|$ converge.

Proposition 3. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument simplement sur $A \subset D$, alors elle converge simplement sur A .

Définition 5. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $A \subset D$ si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses sommes partielles (où $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$) converge uniformément sur A .

Proposition 4. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $A \subset D$, alors elle converge simplement sur A .

Proposition 5. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $A \subset D$, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur A vers la fonction nulle.

Proposition 6. Soit $A \subset D$. On a équivalence entre :

- (i). la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A ,
- (ii). la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur A et la suite de fonctions $(R_n)_n$ de ses restes (où $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$) converge uniformément vers la fonction nulle sur A .

Définition 6. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $A \subset D$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bornée sur A et la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty, A}$ converge, où $\|f_n\|_{\infty, A} = \sup_{x \in A} |f_n(x)|$.

Théorème 2 (CVN \Rightarrow CVAS et CVU).

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $A \subset D$, alors celle-ci converge uniformément sur A . De plus, elle converge absolument simplement sur A .

Théorème 3. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D vers \mathbb{K} et $A \subset D$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A et si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A , alors la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A .

Corollaire 1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur un intervalle $I \subset D$ et si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I , alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .

Théorème 4. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D vers \mathbb{K} et $A \subset D$. Soit a un point adhérent à A (ou $a = +\infty$ si A n'est pas majoré, ou $a = -\infty$ si A n'est pas minoré). On suppose que

- (i). pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie en a , notée l_n ,
- (ii). la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A ,

alors la série numérique $\sum l_n$ converge, la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite finie en

a , et $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$. Autrement dit,

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right).$$

Théorème 5. Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et $\sum f_n$ une série de fonctions de $[a; b]$ vers \mathbb{K} . On suppose que :

- (i). pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a; b]$,
- (ii). la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a; b]$,

alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a; b]$ et la série numérique $\sum \int_a^b f_n(x) dx$ converge vers $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx$. Autrement dit,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx.$$

Théorème 6 (Théorème d'intégration terme à terme (admis)). Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I vers \mathbb{K} . On suppose que :

(i). pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur I ,

(ii). la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ continue par morceaux,

(iii). la série numérique $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ converge,

alors la fonction S est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

Théorème 7. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $\sum f_n$ une série de fonctions de I vers \mathbb{K} . On suppose que

(i). pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I ,

(ii). la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement en un point $a \in I$,

(iii). la série de fonctions des dérivées $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment de I ,

alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et

$$S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n.$$

Théorème 8. Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $p \in \mathbb{N}^*$ et $\sum f_n$ une série de fonctions de I vers \mathbb{K} . On suppose que

(i). pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^p sur I ,

(ii). pour tout $k \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I ,

(iii). la série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I ,

alors la fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^p sur I et

$$\forall k \in \llbracket 0; p \rrbracket, \quad S^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}.$$