Proposition 1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(*i*). $u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$,

(*ii*). $u \circ u^* = \mathrm{Id}_E$,

(*iii*). *u est bijectif et* $u^{-1} = \mathrm{Id}_E$.

Définition 1. *On appelle endomorphisme orthogonal (ou automorphisme orthogonal) tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$. On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.*

Proposition 2. *Soit $\mathcal{B}$ une base* ***orthonormée*** *de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :*

(*i*). *u est un endomorphisme orthogonal,*

(*ii*). $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ *est une matrice orthogonale.*

Proposition 3. *L'ensemble $(O(E), \circ)$ des endomorphismes orthogonaux de E muni de la composition est un groupe. Plus précisément, $O(E)$ est un sous-groupe du groupe $(GL(E), \circ)$ des endomorphismes inversibles muni de la composition :*

(*i*). $\mathrm{Id}_E \in O(E)$,

(*ii*). $\forall u, v \in O(E), \quad u \circ v \in O(E)$,

(*iii*). $\forall u \in O(E), \quad u^{-1} \in O(E)$.

L'ensemble $O(E)$ est appelé le groupe orthogonal de E.

Théorème 1. *Soit $u \in L(E)$. On a équivalence entre :*

(*i*). *u est un endomorphisme orthogonal,*

(*ii*). *u conserve la norme, i.e.* $\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|$,

(*iii*). *u conserve le produit scalaire, i.e* $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$,

(*iv*). *pour toute base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, l'image $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ de $\mathcal{B}$ par u est une base orthonormée de E (autrement dit u envoie toute base orthonormée de E sur une base orthonormée de E),*

(*v*). *il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que l'image $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ de $\mathcal{B}$ par u est une base orthonormée de E (autrement dit u envoie au moins une base orthonormée de E sur une base orthonormée de E).*

Proposition 4. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme orthogonal, alors* $\det(u) \in \{-1; 1\}$.

Corollaire 1. *Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors* $\det(A) \in \{-1; 1\}$.

Définition 2. *On appelle isométrie directe ou positive de E tout $u \in O(E)$ de déterminant 1. On appelle isométrie indirecte ou négative de E tout $u \in O(E)$ de déterminant -1.*

Proposition 5. *L'ensemble des isométries directes de E, noté $SO(E)$, est un sous-groupe de $(O(E), \circ)$ appelé groupe spécial orthogonal de E. L'ensemble des matrices orthogonales de tailles n de déterminant 1, noté $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$, est un sous-groupe de $(O_n(\mathbb{R}), \times)$ appelé groupe spécial orthogonal d'ordre n.*

Définition 3. *Soit H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est un hyperplan de E si* $\dim(H) = \dim(E) - 1$.

Lemme 1. *Soit H un sous-espace vectoriel de E. On a équivalence entre :*

(i). *H est un hyperplan de E,*

(ii). *il existe $a \in E$ de norme 1 tel que $H = (\mathrm{Vect}(a))^\perp$.*

Définition 4. *On appelle réflexion (de E) toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H de E. Les réflexions sont des endomorphismes orthogonaux.*

Théorème 2 ((admis))**.** *Tout endomorphisme orthogonal $u \in O(E)$ peut s'écrire comme la composée de m réflexions avec $m \in [\![0; n]\!]$ où $n = \dim(E)$.*

Proposition 6. *Soit $u \in O(E)$, alors* $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1; 1\}$.

Corollaire 2. *Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1; 1\}$ (où $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres réelles de A).*

Lemme 2. *Soit $u \in O(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u. De plus, l'endomorphisme induit par u sur F (resp. sur $F^\perp$), noté u_F (resp. $u_{F^\perp}$), est un endomorphisme orthogonal de F (resp. $F^\perp$).*

Lemme 3. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (on rappelle que $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$). Alors il existe une droite vectorielle ou un plan vectoriel de E stable par u, i.e. il existe un sous-espace vectoriel F de E de dimension 1 ou 2 vérifiant $u(F) \subset F$.*

Proposition 7. $SO_2(\mathbb{R}) = \{M \in O_2(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\} = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ *où l'on a noté* $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. *Le groupe spécial orthogonal d'ordre* 2, $SO_2(\mathbb{R})$, *est un sous-groupe commutatif de* $(O_2(\mathbb{R}), \times)$ *:*

$$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \quad R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'} \times R_\theta.$$

Proposition 8. $O_2(\mathbb{R}) \backslash SO_2(\mathbb{R}) = \{M \in O_2(\mathbb{R}) \mid \det(M) = -1\} = \{S_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ *où l'on a noté* $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. *Ainsi,*

$$O_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Théorème 3. *Soit* $u \in O(E)$. *Il existe une base orthonormée de* E *dans laquelle la matrice de* u *est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme :*

$$(1), (-1) \text{ ou } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ où } \theta \in \mathbb{R}.$$