Définition 1. *On appelle produit scalaire sur un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* E *toute application* $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant :*

(i). φ *est bilinéaire, i.e.* φ *est linéaire en chacune de ses variables (pour tout* $x \in E$*, l'application* $\varphi(x, .) : y \in E \longmapsto \varphi(x, y)$ *est linéaire et pour tout* $y \in E$*, l'application* $\varphi(., y) : x \in E \longmapsto \varphi(x, y)$ *est linéaire) :*

$$\begin{aligned} &\forall x, y, y' \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x, \lambda y + y') = \lambda\varphi(x, y) + \varphi(x, y') \\ \textit{et} \quad &\forall x, x', y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\lambda x + x', y) = \lambda\varphi(x, y) + \varphi(x', y) \end{aligned}$$

(ii). φ *est symétrique, i.e.* $\forall x, y \in E$, $\varphi(y, x) = \varphi(x, y)$,

(iii). φ *est positive, i.e.* $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$,

(iv). φ *est définie, i.e.* $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) = 0 \iff x = 0_E$.

En résumé, un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Proposition 1. *Soit* $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$*, alors* φ *est un produit scalaire sur* E *si, et seulement si,*

(i). φ *est bilinéaire,*

(ii). φ *est symétrique,*

(iii). $\forall x \in E$, $x \neq 0_E$, $\varphi(x, x) > 0$.

Définition 2. *On appelle espace préhilbertien réel tout couple* (E, φ) *formé d'un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* E *et d'un produit scalaire* φ *sur* E*. Il est alors usuel de noter* $(x \mid y)$, $\langle x, y \rangle$ *ou* $x.y$ *au lieu de* $\varphi(x, y)$ *le produit scalaire de deux vecteurs de* E*.*

Définition 3. *On appelle espace euclidien tout espace préhilbertien réel de dimension finie.*

Proposition 2. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. L'application* $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$*. On l'appelle le produit scalaire canonique sur* $\mathbb{R}^n$*.*

Proposition 3. *Soient* $n, p \in \mathbb{N}^*$*. L'application* $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad \langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *appelé produit scalaire canonique sur* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$*.*

Proposition 4. *Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$. Notons $E = \mathcal{C}([a;b];\mathbb{R})$. L'application $\langle \cdot \cdot \rangle$ définie par*

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

définit un produit scalaire sur E appelé produit scalaire canonique sur E.

Définition 4. *On appelle norme euclidienne sur E l'application $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par*

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Théorème 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tout $x \in E$, on rappelle que l'on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Pour tous $x, y \in E$, on a*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, la famille (x, y) est liée.

Proposition 5. *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. La norme euclidienne*

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\| : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array}$$

est une norme sur E. On l'appelle aussi la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposition 6 (Identités de polarisation). *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien dont on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Pour tous $x, y \in E$, on a*

$$\begin{array}{rcl} \langle x, y \rangle & = & \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \\ & = & \dfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\ & = & \dfrac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \end{array}$$

Proposition 7 (Identité du parallélogramme). *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien dont on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Pour tous $x, y \in E$, on a*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Définition 5. *On appelle produit scalaire hermitien sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E toute application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :*

(i). *φ est sesquilinéaire, i.e. linéaire par rapport à sa seconde variable et semi-linéaire par rapport à sa première variable :*

$$\begin{array}{rll} & \forall x, y, y' \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, & \varphi(x, \lambda y + y') = \lambda \varphi(x, y) + \varphi(x, y') \\ \text{et} & \forall x, x', y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, & \varphi(\lambda x + x', y) = \overline{\lambda} \varphi(x, y) + \varphi(x', y) \end{array}$$

(ii). *φ est à symétrie hermitienne, i.e. $\forall x, y \in E$, $\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$,*

(iii). *φ est positive, i.e. $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$,*

(iv). *φ est définie, i.e. $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) = 0 \iff x = 0_E$.*

En résumé, un produit scalaire hermitien sur E est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.

Proposition 8. *L'application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ est un produit scalaire hermitien sur E si, et seulement si,*

(i). *φ est sesquilinéaire,*

(ii). *φ est à symétrie hermitienne,*

(iii). $\forall x \in E$, $x \neq 0_E$, $\varphi(x, x) > 0$.

Définition 6. *On appelle espace préhilbertien complexe tout couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ formé d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E et d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E.*

On appelle espace hermitien tout espace préhilbertien complexe de dimension finie.

Proposition 9. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par*

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k$$

est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^n$. On l'appelle le produit scalaire hermitien canonique sur $\mathbb{C}^n$.

Proposition 10. *Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par*

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}), \quad \langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}({}^t\overline{A} B)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ appelé produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

Proposition 11. *Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$. Notons $E = \mathcal{C}([a; b]; \mathbb{C})$. L'application*

$\langle \cdot \cdot \rangle$ *définie par*

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(t)} g(t) \, \mathrm{d}t$$

définit un produit scalaire sur E appelé produit scalaire canonique sur E.

Théorème 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien complexe. Pour tout $x \in E$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Pour tous $x, y \in E$, on a alors*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, la famille (x, y) est liée.

Corollaire 1. *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien complexe. L'application*

$$\begin{array}{rccc} \| \cdot \| : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array}$$

définit une norme sur E, appelée norme hermitienne sur E (aussi appelée norme associée au produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

Proposition 12. *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien complexe de norme hermitienne associée $\| \cdot \|$.*

1. *Identité de polarisation :*

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|ix + y\|^2 - i\|ix - y\|^2 \right)$$

2. *Identité du parallélogramme :*

$$\forall x, y \in E, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Définition 7. *Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien ou hermitien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On appelle matrice du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice suivante :*

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle) = (\langle e_k, e_\ell \rangle)_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq n}} = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \ldots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & & \langle e_2, e_n \rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \langle e_n, e_2 \rangle & \ldots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

(où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si E est euclidien, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si E est hermitien).

Pour tout $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \in E$, *en notant*

$$X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

alors

$$\langle x, y \rangle = {}^t\overline{X} M Y$$

(où l'on a identifié $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ *avec* $\mathbb{K}$*).*

Proposition 13. *Soient* $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espace euclidien ou hermitien de dimension* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ *deux bases de* E*, alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\langle \cdot, \cdot \rangle) = {}^t\overline{P}\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle) P$$

où P *est la matrice de passage de la base* $\mathcal{B}$ *à la base* $\mathcal{B}'$*.*