Equations différentielles linéaires à coefficients constants.

Système de n équations d'ordre 1.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$$

où $A \in M_n(K)$, $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Une solution est une fonction $\varphi : I \to K^n$ définie sur un intervalle I et vérifiant $\frac{d}{dt}\varphi(t) = A\varphi(t)$.

Propriétés générales.

1. L'ensemble des solutions est un espace vectoriel sur K (conséquence de la linéarité de l'équation). [On verra que sa dimension est n.]

2. Si $\varphi(t)$ est une solution et $c \in$ R, alors $\varphi(t+c)$ l'est aussi (conséquence du fait que A est à coefficients constants).

3. *Complexification.* Soit A une matrice *réelle* et $\mathbf{z}(t)$ une solution *complèxe*: $\mathbf{z}' = A\mathbf{z}$, ($\mathbf{z}(t) \in \mathbf{C}^n$). Alors $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ où $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont des solutions réelles: la partie réelle et la partie imaginaire d'une solution complèxe sont des solutions réelles.

Il est donc utile de chercher dès le début des solutions complèxes.

4. Chaque vecteur propre v de A, $Av = \lambda v$, engendre une solution "exponentielle": $\varphi(t) = e^{\lambda t} v$. Si A est diagonalisable, une base de vecteurs propres donne n solutions de $x' = Ax$ linéairement indépendentes (et toute autre solution sera leur combinaison linéaire).

5. *Changement de base.* Par un changement linéaire des variables, $x = Py$, le système différentiel $x' = Ax$ est transformé en $y' = By$ avec $B = P^{-1}AP$. Pour simplifier le système on cherche à réduire la matrice A à une forme "simple".

Si A est diagonalisable, $B = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, le système $y' = By$ est scindé (séparation des variables complète): $y_1' = \lambda_1 y_1$, ... , $y_n' = \lambda_1 y_n$. Toutes ses solutions sont donnés par $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$, ... , $y_n(t) = c_n e^{\lambda_n t}$. [Ici $c_i = y_i(0)$.]

Si A n'est par diagonalisable, on peut la réduire à la forme de Jordan (sur $\mathbf{C}$); dans ce cas le système se décompose en sous-systèmes indépendents dans chaque bloc de Jordan (séparation des variables partielle).

Dans un bloc de Jordan de dimension k on a le système
$y_1' = \lambda y_1$, $y_2' = \lambda y_2 + y_1$,..., $y_k' = \lambda y_k + y_{k-1}$.
La solution générale est $y_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$, $y_2(t) = (c_1 t + c_2)e^{\lambda t}$, ... ,
$y_k(t) = (c_1 t^{k-1} + c_2 t^{k-2} + ... + c_k)e^{\lambda t}$. [Ici $c_i = y_i(0)$.]

Conclusion: pour tout $y_0 \in \mathbf{C}^n$ il existe une solution unique $y(t)$ définie sur R vérifiant la condition initiale $y(0) = y_0$. Pour le système $x' = Ax$ on a :

6. Théorème d'existence et d'unicité. Pour tout $x_0 \in K^n$ il existe une solution unique $x(t)$ définie sur R à valeurs dans K^n vérifiant la condition initiale $x(0) = x_0$.

7. Structure des solutions. En réduisant la matrice A à la forme de Jordan, on déduit que toute composante d'une solution *complexe* est une combinaison linéaire de fonctions $t^p e^{\lambda t}$, où λ est une valeur propre de A et $p < l_\lambda$; ici l_λ est la dimension maximal des blocs de Jordan associés à λ (égale à la multiplicité de λ dans le polynôme minimal de A).

Toute composante d'une solution réelle est donc une une combinaison linéaire de termes $t^p e^{\lambda t}$ (pour les valeurs propres λ réelles) et $t^p e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ et $t^p e^{\alpha t}\sin(\beta t)$), (pour les valeurs propres λ complèxes, où $\lambda = \alpha + i\beta$), et $p < l_\lambda$.

.

8. Proposition. *Comportement asymptotique des solutions.* Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) Pour toute solution φ on a $\varphi(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.

2) Les parties réelles de toutes les valeurs propres de A sont négatives.

9. Equation scalaire d'ordre n.

$$\frac{d^n}{dt^n}x + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x + ... + a_1\frac{d}{dt}x + a_0 x = 0(*)$$

A l'équation (*) on peut associer un système différentiel équivalent d'ordre 1 en inroduisant de nouvelles inconnues: $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_n = x^{(n-1)}$. Le système s'écrit $x_1' = x_2$, ..., $x_{n-1}' = x_n$, $x_n' = -(a_0 x_1 + ... + a_{n-1}x_n)$, donc $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $\mathbf{x} = (x, x', x'', ..., x^{(n-1)})$ et A est la matrice compagnon.

On sait que le polynôme caractéristique de A est

$p_A(z) = (-1)^n(z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0)$,

et on sait que le polynôme minimal est égal (au signe près) au polynôme caractéristique; donc pour chaque valeur propre il y a un seul bloc de Jordan (les espaces propres sont tous de dimension 1). On en déduit:

10. Proposition. Soit $p_A(z) = (-1)^n(z-\lambda_1)^{m_1}...(z-\lambda_k)^{m_k}$. Les fonctions $t^{p_j}e^{\lambda_j t}$, où $j = 1, ..., k$ et $0 \leq p_j < m_j$ forment une base (complèxe) des solutions de l'équation (*).

Toute solution s'écrit donc comme $\sum_1^k q_j(t)e^{\lambda_j t}$, où $q_j(t)$ sont des polynômes, $\deg(q_j) < m_j$.

Si les coefficients $a_0, ..., a_{n-1}$ sont réels, une base des solutions reélles est donnée par les fonctions $t^{p_j}e^{\lambda_j t}$ (pour les λ_j réelles) et $t^{p_j}e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t)$ et $t^{p_j}e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t)$) (pour les λ_j complèxes, où $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$) et $0 \leq p_j < m_j$.

Démarche à suivre: pour résoudre l'équation scalaire (*) avec la condition initiale $x(0) = c_1$, $x'(0) = c_2$, ..., $x^{(n-1)}(0) = c_n$ il faut

1) résoudre l'équation caractérfistique $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$ qui se déduit directement de l'équation différentielle (sans passer par la matrice);

2) écrire la solution comme une combinaison linéaire des solutions de base explicitées dans la Proposition 10 avec des coefficients indéterminés et calculer les coefficients afin de satisfaire les conditions initiales (cela revient à résoudre un système d'équations linéaires).

.

Suite définie par une récurrence linéaire.

Récurrence d'ordre 1 à n composantes.

Soit $A \in M_d(K)$. On s'intéresse à des suites (U_n) à valeurs dans K^d vérifiant une récurrence linéaire:

$$U_{n+1} = AU_n(*)$$

Une solution est une suite vérifiant (*). En itérant, on a: $U_n = A^n U_0$, d'où

Théorème d'existence et d'unicité. Pour tout vecteur $v \in K^d$ il existe une solution unique (U_n) vérifiant cette condition initiale.

Pour calculer A^n on réduit A à une forme simple (diagonale, Dunford,...).

.

Propriétés générales.

1. L'ensemble des solutions (U_n) est un espace vectoriel de dimension d.

2. Si (U_n) est une solution et $c \in N$, alors (U_{n+c}) l'est aussi .

3. *Complexification.* Soit A une matrice *réelle* et (U_n) une solution *complèxe*; alors la partie réelle et la partie imaginaire de (U_n) sont des solutions réelles.

Il est donc utile de chercher dès le début des solutions complèxes.

4. Chaque vecteur propre v de A, $Av = \lambda v$, engendre une solution "exponentielle": $U_n = \lambda^n v$.

Si A est diagonalisable, une base de vecteurs propres de A donne une base de solutions "exponentielles".

5. *Changement de base.* Par un changement linéaire des variables, $U = PV$, la récurrence $U_{n+1} = AU_n$ est transformé en $V_{n+1} = BV_n$ avec $B = P^{-1}AP$.

7. Structure des solutions. On réduit la matrice A à la forme de Jordan, et on calcule A^n dans un bloc de Jordan de dimension k ($\mathcal{N}^k = 0$):

$(\lambda I + \mathcal{N})^n = \sum_0^{k-1} C_n^j \lambda I^{n-j} \mathcal{N}^j$.

On en déduit que toute composante d'une solution *complexe* est une combinaison linéaire des suites $(n^p \lambda^n)$, où λ est une valeur propre de A et $p < l_\lambda$; ici l_λ est la multiplicité de λ dans le polynôme minimal de A.

.

8. Récurrence scalaire d'ordre d.

$$u_{n+d} + a_{d-1}u_{n+d-1} + ... + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n = 0(*)$$

A l'équation (*) on peut associer une récurrence équivalente d'ordre 1 en inroduisant la suite vectorielle (V_n) dans K^d: $V_n = (u_{n+d-1}, ..., u_n)^t$.

Le système équivalent à (*) s'écrit $V_{n+1} = AV_n$, où A est une matrice compagnon.

Le polynôme caractéristique est $p_A(z) = (-1)^d(z^d + a_{d-1}z^{d-1} + ... + a_1 z + a_0)$. Pour chaque valeur propre il y a un seul bloc de Jordan . On en déduit:

9. Proposition. Soit $p_A(z) = (-1)^d(z-\lambda_1)^{m_1}...(z-\lambda_k)^{m_k}$. Les suites $(n^{p_j}\lambda_j^n)$, où $j = 1, ..., k$ et $0 \leq p_j < m_j$ forment une base (complèxe) de solutions de (*).

Démarche à suivre: pour résoudre l'équation scalaire (*) avec la condition initiale $u_1 = c_1$, ... $u_d = c_d$ il faut

1) résoudre l'équation caractéristique $z^d + a_{d-1}z^{d-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$ qui se déduit directement de l'équation de la récurrence (sans passer par la matrice);

2) écrire la solution comme une combinaison linéaire des solutions de base explicitées dans la Proposition 9 avec des coefficients indéterminés et calculer les coefficients afin de satisfaire les conditions initiales (cela revient à résoudre un système d'équations linéaires).

.

Exponentielle d'une matrice.

On considère le système $x' = Ax$, où $A \in M_n(K)$. Pour $v \in K^n$ soit φ_v la solution vérifiant la condition initiale $\varphi_v(0) = v$. Posons $R_t(v) = \varphi_v(t)$; pour tout réel t cela définit une application $R_t : K^n \to K^n$.

Proposition. 1. R_t est une application linéaire.

2. Pour tout $v \in K^n$, $\varphi(t) = R_t(v)$ est la solution de $x' = Ax$ vérifiant la condition initiale $\varphi(0) = v$. La $i-$ème collonne de R_t est la solution vérifiant la condition initiale $\varphi(0) = e_i$.

3. R_t vérifie l'équation $\frac{d}{d}R_t = AR_t$. C'est l'unique solution de l'équation différentielle matricielle $\frac{d}{d}\Phi(t) = A\Phi(t)$ vérifiant la condition initiale $\Phi(0) = Id$.

4. Pour tout s et t on a $R_{s+t} = R_s R_t$: la famille $\{R_t\}$ est un "groupe à un paramètre". En particulier, R_t est inversible et $R_t^{-1} = R_{-t}$.

5. Changement de base: soit $\tilde{R}_t$ la famille associée au système $y' = (P^{-1}AP)y$. Alors $\tilde{R}_t = P^{-1}R_tP$.

6. Proposition. Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$. La série $e^A = \sum_0^\infty \frac{A^n}{n!}$ converge (absolument) et $R_t = e^{tA} = \sum_0^\infty \frac{A^n}{n!}t^n$.

.

Si $A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $e^A = diag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$.

.

7. Corollaire. $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^AP$.

Donc pour calculer l'exponentielle on réduit la matrice A.

8. Lemme. Si $AB + BA$, on a $e^{A+B} = e^Ae^B$.

(En pârticulier, $(e^A)^{-1} = e^{-A}$).

Soit $A = D + \mathcal{N}$ la décomposition de Dunford (ou de Jordan) et $\mathcal{N}^{d+1} = 0$. Alors $e^{tA} = e^{tD+t\mathcal{N}} = e^{tD}(I + t\mathcal{N} + t^2\mathcal{N}^2/2! + ... + t^d\mathcal{N}^d/d!)$.

On en déduit la structure des éléments de e^{tA} en tant que fonctions de t. Rappellons que les colonnes de e^{tA} sont les solutions du système $x' = Ax$ vérifiants les conditions initiales particulières. L'exponentielle e^{tA} contient autant d'information que n'importe quelle base des solutions de l'équation $x' = Ax$:

9. Lemme. Soit $(\varphi_1, \ldots ,\varphi_n)$ une base base des solutions de l'équation $x' = Ax$. Soit $\Phi(t)$ la matrice dont les colonnes sont $\varphi_1(t), \ldots ,\varphi_n(t)$. Alors $e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$.

.

10. Lemme. a) Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ les valeurs propres de A. Alors $(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$ sont les valeurs propres de e^A.

b) $\det(e^A) = e^{tr(A)}$.

(La démonstration passe par la trigonalisation.)

11. L'exponentielle et la méthode d'Euler. Proposition.

$e^A = \lim_{n\to\infty}(I + \frac{A}{n})^n$

.

12. Système non-homogène: méthode de la variation de la constante.

On considère l'équation non-homogène:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = A\mathbf{x}(t) + b(t)$$

"Principe de superposition: a) Soit $x' = Ax + b_1$ et $y' = Ay + b_2$. Alors $z(t) = x(t) + y(t)$ vérifie $z' = Az + (b_1 + b_2)$.

b) *Toute solution de l'equation non-homogène $x' = Ax + b(t)$ est la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène $y' = Ay$.*

On cherche la solution $x(t)$ sous la forme $x(t) = e^{tA}y(t)$. On obtient pour $y(t)$ l'équation $y'(t) = e^{-tA}b(t)$, d'où la **formule de Duhamel:**

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)ds$$

13. Equation linéaire non-homogène d'ordre n: méthode directe.

Soit $\partial = \frac{d}{dt}$ l'opérateur de dérivation dans l'espace des fonctions $C^\infty(R)$. L'équation

$$\frac{d^n}{dt^n}x + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x + ... + a_1\frac{d}{dt}x + a_0x = b(t)$$

peut c'écrire comme

$$(\partial^n + a_{n-1}\partial^{n-1} + ... + a_1\partial + a_0 Id)x(t) = b(t)(*)$$

Factorisons le polynôme caractéristique:

$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0 = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)...(z - \lambda_n)$ (les λ_j peuvent se répéter). Alors (*) s'écrit

$$(\partial - \lambda_1 Id)(\partial - \lambda_2 Id)...(\partial - \lambda_n Id)x(t) = b(t)(**)$$

Lemme. Toute solution de l'équation $(\partial - \lambda Id)u(t) = f(t)$

(ou $u'(t) - \lambda u(t) = f(t)$) est donnée par $u(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)}f(s)ds + u(0)e^{\lambda t}$.

.

Démarche à suivre. Pour résoudre (**) il suffit donc de procéder par étape en résolvant successivement des équations d'ordre 1:

on pose $(\partial - \lambda_{k+1}Id)...(\partial - \lambda_n Id)x(t) = u_k(t)$, $(k = 0, ..., n-1)$, $u_n(t) = x(t)$ (noter que $u_0(t) = b(t)$) et on a un système d'équations d'ordre 1 que l'on résoud l'une après l'autre:

$u_k'(t) - \lambda_k u_k(t) = u_{k-1}(t)$, $(k = 1, ..., n)$.

.

14. "Méthode des amplitudes complèxes".

On s'intéresse à l'équation

$$\frac{d^n}{dt^n}x + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x + ... + a_1x' + a_0x = t^k e^{\mu t}$$

Si μ n'est pas une racine de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière (complèxe) de la forme $u(t) = at^k e^{\mu t}$. Si μ est une racine de l'équation caractéristique de multiplicité m, il existe une solution particulière de la forme $u(t) = at^{k+m}e^{\mu t}$. Pour déterminer "l'amplitude" a il suffit de mettre $u(t)$ dans l'équation.

Démonstration: on procède par étapes. Si $\mu \neq \lambda$, l'équation $u' - \lambda u = ct^p e^{\mu t}$ admet une solution particulière $u(t) = c_1 t^p e^{\mu t}$. Si $\mu = \lambda$, l'équation

$u' - \lambda u = ct^p e^{\mu t}$ admet une solution particulière $u(t) = c_1 t^{p+1} e^{\mu t}$.