Définition 1

Pour $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *continue, on définit* $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ *par* $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \nearrow \beta} F(x) - \lim_{x \searrow \alpha} F(x) \underset{notation}{=} [F]_\alpha^\beta$.

Proposition 2

Pour $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *continue, on a*

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \sup\left\{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \mid [a;b] \subset I\right\}.$$

Définition 3

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *continue. On dit que la fonction* f *est* ***intégrable*** *sur* I *si l'intégrale* $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ *est un réel positif fini, ce que l'on écrit aussi* $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$.

Théorème 4

Soient $a > 0$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *La fonction* $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\lambda}$ *est intégrable sur* $[a;+\infty[$ *si et seulement si* $\lambda > 1$.

Théorème 5

Soient $a > 0$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *La fonction* $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\lambda}$ *est intégrable sur* $]0;a]$ *si et seulement si* $\lambda < 1$.

Proposition 6

Soient f *et* g *deux fonctions continues de* I *dans* $\mathbb{R}^+$.

(a). *Pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_I (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$.

(b). *On a la relation de Chasles : pour tout* $\gamma \in I$, $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\gamma f(t)\,\mathrm{d}t + \int_\gamma^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$.

(c). *Si* $f \le g$, *on a* $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$.

(d). *On a l'inégalité de Cauchy-Scwharz :* $\displaystyle\int_I f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \le \sqrt{\int_I f(t)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_I g(t)^2\,\mathrm{d}t}$.

(e). *Changement de variable : Si* J *est un intervalle d'extrémités* a *et* b *et* $\varphi : J \longrightarrow I$ *est une bijection de classe* $\mathcal{C}^1$ *strictement croissante* ($\alpha = \lim_{u \to a} \varphi(u)$, $\beta = \lim_{u \to b} \varphi(u)$), *on a*

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Corollaire 7

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *continues.*

- *Si* $f \le g$ *et* g *est intégrable sur* I, *alors* f *est aussi intégrable sur* I.

- *Si $f \leq g$ et f n'est pas intégrable sur I, alors g n'est pas intégrable sur I.*

Corollaire 8

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue et J un intervalle inclus dans I.

- *Si f est intégrable sur I, elle est aussi intégrable sur J.*
- *Si f n'est pas intégrable sur J, elle ne l'est pas non plus sur I.*

Définition 9

Soit $V \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$. On dit que V est un voisinage de

- *$a \in \mathbb{R}$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'une des trois parties $]a-\varepsilon; a[\cup]a; a+\varepsilon[$, $]a-\varepsilon; a[$ et $]a; a+\varepsilon[$ est incluse dans V,*
- *de $+\infty$ s'il existe $A > 0$ tel que $]A; +\infty[\subset V$,*
- *de $-\infty$ s'il existe $B < 0$ tel que $]-\infty; B[\subset V$.*

(la “vraie” notion de voisinage sera vue au moment des espaces vectoriels normés)

Définition 10

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On dit que f est définie au voisinage de *a si son domaine de définition est un voisinage de a.*

Définition 11

Soient J un intervalle (contenant au moins deux points) de $\mathbb{R}$, a un point adhérent à J (c'est-à-dire que a appartient à J ou est une extrémité, éventuellement infinie, de J) et $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On dit que f est dominée par g au voisinage de *a s'il existe un voisinage V de a tel que*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in V, \quad |f(x)| \leq M|g(x)|.$$

On note alors $f(x) = \underset{x \to a}{\mathcal{O}}(g(x))$.

Définition 12

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point adhérent à J et $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On dit que f est négligeable devant *g au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage V de a telle que*

$$\forall x \in V, \quad f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

On note alors $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$.

Définition 13

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point adhérent à J et $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On dit que f est équivalente à *g au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage V de a telle que*

$$\forall x \in V, \quad f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

Proposition 14

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point adhérent à J et $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

- *Si* $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, *alors* $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$.
- *Si* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, *alors* $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$ *et* $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(f(x))$.

Théorème 15

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a;+\infty[\cup \{+\infty\}$ *et* $f,g : [a;b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ *continues. Si* $f(x) \underset{x\to b}{=} \mathcal{O}(g(x))$ *et si* g *est intégrable sur* $[a;b[$, *alors* f *est aussi intégrable sur* $[a;b[$.

Corollaire 16

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a;+\infty[\cup \{+\infty\}$ *et* $f,g : [a;b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ *continues. Si* $f(x) \underset{x\to b}{=} o(g(x))$ *et si* g *est intégrable sur* $[a;b[$, *alors* f *est aussi intégrable sur* $[a;b[$.

Corollaire 17

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a;+\infty[\cup \{+\infty\}$ *et* $f,g : [a;b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ *continues. Si* $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$, *alors* f *est intégrable sur* $[a;b[$ *si et seulement si* g *l'est.*

Définition 18

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue sur l'intervalle* I. *On dit que* f *est* ***intégrable*** *sur* I *si* $\int_I |f(t)| \,\mathrm{d}t < +\infty$ *(autrement dit, si* $|f|$ *est intégrable sur* I*).*
Dans ce cas, on définit $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f^+(t)\,\mathrm{d}t - \int_I f^-(t)\,\mathrm{d}t$.

Définition 19

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ *continue. On dit que* f *est intégrable sur* I *si* $\int_I |f(t)| \,\mathrm{d}t < +\infty$. *On pose alors*

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \mathrm{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t + i\int_I \mathrm{Im}(f)(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition 20

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) continue, intégrable sur* I. *On a l'inégalité*

$$\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 21

(Linéarité de l'intégrale)
Soient $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) continues, intégrables sur* I. *Pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, *la fonction* $\lambda f + \mu g$ *est intégrable sur* I *et* $\int_I (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$.

Proposition 22

(Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues. Si f^2 et g^2 sont intégrables sur I, alors fg est intégrable sur I et on a

$$\int_I |f(t)g(t)| \,\mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_I f(t)^2 \,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_I g(t)^2 \,\mathrm{d}t}.$$

Définition 23

*Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continue. On dit que l'intégrale impropre $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si les primitives de f admettent des limites **finies** en α et β. Si c'est le cas, on pose alors $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\nearrow\beta} F(x) - \lim_{x\searrow\alpha} F(x)$, où F est une primitive de f sur I.*

*Sinon, on dit que l'intégrale impropre $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ **diverge**.*

Proposition 24

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continue. Si f est intégrable sur I, alors l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Définition 25

*On dit que l'intégrale $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si f est intégrable sur I, i.e si l'intégrale $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente. Une intégrale convergente mais non absolument convergente est dite **semi-convergente**.*

Proposition 26

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continues. Si $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, l'intégrale $\int_I (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vérifie

$$\int_I (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_I g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 27

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. *Relation de Chasles : Si $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $c \in]\alpha;\beta[$, alors les intégrales $\int_\alpha^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et vérifient*

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^\beta f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. *Changement de variables : Soit $\varphi : J \longrightarrow I$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante sur l'intervalle J d'extrémités $a = \inf(J)$ et $b = \sup(J)$. Les intégrales impropres $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ et*

$\displaystyle\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ *sont de même nature et en cas de convergence, on a*

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Théorème 28

Soient $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$. *Si* $\displaystyle\int_\alpha^\beta u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, et si la fonction* uv *admet des limites finies en* α *et* β, *alors* $\displaystyle\int_\alpha^\beta u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ *converge et*

$$\int_\alpha^\beta u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [uv]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 29

Soient λ, $\mu \in \mathbb{R}$ *et* $b > 1$. *La fonction* $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\lambda (\ln t)^\mu}$ *est intégrable sur* $[b; +\infty[$ *si et seulement si* $\lambda > 1$ *ou* ($\lambda = 1$ *et* $\mu > 1$).

Proposition 30

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *et* $0 < a < 1$. *La fonction* $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\lambda \left|\ln t\right|^\mu}$ *est intégrable sur* $]0; a]$ *si et seulement si* $\lambda < 1$ *ou* ($\lambda = 1$ *et* $\mu > 1$).