

Exercice 1 Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels vérifiant :  $-1 < a < 4$  et  $-3 < b < -1$ . Donner un encadrement de  $a + b$ ,  $a - b$ ,  $a \cdot b$ ,  $\frac{a}{b}$ .

Exercice 2 Soient  $a$  et  $b$  deux réels. Montrer  $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$

Exercice 3 Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 0$ ,  $|\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} y_i^2}$

Exercice 4 Soit  $x > 0$  : Démontrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $(1 + x)^n > 1 + nx$ .

Exercice 5 Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ . A-t-on équivalence entre les deux propositions suivantes :

- $\exists \alpha > 0, \forall x \in A, x \geq \alpha$
- $\forall x \in A, x > 0$

Exercice 6 Les propositions suivantes sont elles vraies :

- $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall \varepsilon > 0, x \leq \varepsilon) \Rightarrow x \leq 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, (x \leq \varepsilon \Rightarrow x \leq 0)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$

Exercice 7 Etant donné un ensemble  $A \subseteq \mathbb{R}$ , écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

- 10 est un majorant de  $A$
- 10 est la borne supérieure de  $A$
- $m$  est la borne inférieure de  $A$
- $P$  n'est pas un majorant de  $A$
- $A$  est majoré
- $A$  n'est pas minoré

Exercice 8 Soient  $A$  et  $B$  deux sous ensembles non vides et majorés de  $\mathbb{R}$ . Montrer que :

- 1-  $A \subseteq B \Rightarrow \text{Sup } A \leq \text{Sup } B$
- 2-  $A \cup B$  admet une borne supérieure et  $\text{Sup } A \cup B = \text{Max}(\text{Sup } A, \text{Sup } B)$ .
- 3- On note  $A + B$  l'ensemble des éléments de  $\mathbb{R}$  qui s'écrivent  $x + y$ ,  $x \in A, y \in B$ .  
Montrer que  $\text{Sup}(A + B)$  existe et que  $\text{Sup}(A + B) = \text{Sup } A + \text{Sup } B$ .
- 4- Ici on suppose  $A$  et  $B$  sous ensembles non vides et majorés de  $\mathbb{R}_+^*$  ; On note  $AB$  l'ensemble des éléments qui s'écrivent  $xy$ ,  $x \in A, y \in B$ . Justifier l'existence de  $\text{Sup}(AB)$  et que  $\text{Sup}(AB) = \text{Sup } A \text{ Sup } B$ .
- 5- Soit  $A$  un sous-ensemble non vide et minoré de  $\mathbb{R}$ . On note  $-A = \{-x, x \in A\}$ . Montrer que  $\text{Sup}(-A) = -\text{Inf } A$

Exercice 9 Soient  $A$  et  $B$  deux sous ensembles non vides de  $\mathbb{R}$  tels que

$\forall x \in A, \forall y \in B, x \leq y$ . Montrer que  $\text{Sup } A$  et  $\text{Inf } B$  existent et que  $\text{Sup } A \leq \text{Inf } B$ .

Exercice 10 a- Soit  $A = \{ xy, (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \text{ et } x^2 + y^2 \leq 2 \}$ . Justifier l'existence de  $\text{Inf } A$ , de  $\text{Sup } A$  et leur valeur .

b- Même question avec  $B = \{x^2 + y^2, (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } xy = 1 \}$ .

Exercice 11 Soit  $A = \{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ . Préciser borne inférieure et supérieure.

Exercice 12 Soit  $D = \{ \frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}^* \}$ . Cet ensemble admet-il une borne inférieure, un  $\leq$ ?

maximum ?

Exercice 13 Soit  $A = \{ \frac{m}{mn+1}, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^* \}$ . Montrer que 1 est un majorant de A et 0 un minorant puis que  $\text{Sup } A = 1$  et  $\text{Inf } A = 0$ . 1 est-il le plus grand élément de A ? 0 est-il son plus petit élément ?

Exercice 14 Partie Entière d'un réel x.

- 1- Tracer le graphe de la fonction  $f(x) = [2x]$  pour  $x \in [-1, +1]$ .
- 2- Montrer que pour tout  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}$ , on a  $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$ .
- 3- Soit  $n$  un entier relatif et  $x$  un réel : Est-il vrai que  $[n x] = n[x]$  ?  $[n+x] = n + [x]$  ?
- 4- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x$  un réel. Montrer  $[x] = [\frac{[nx]}{n}]$

Exercice 15

- $(x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}) \Rightarrow x + y \in \mathbb{Q}$  : Vrai ou Faux ?
- $(x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \Rightarrow x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  : Vrai ou Faux ?
- Soit  $r \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  : montrer que  $r+x \notin \mathbb{Q}$  et que si  $r \neq 0, rx \notin \mathbb{Q}$  .
- Soient  $x$  et  $y$  des rationnels positifs tels que  $\sqrt{x}$  et  $\sqrt{y}$  soient irrationnels :  
montrer que  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$  est irrationnel.
- Que signifie «  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  » ? Montrer que  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est également dense dans  $\mathbb{R}$ .

Exercice 16

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$ . On pose  $f(1) = \lambda$ .

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n \lambda$

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = n \lambda$

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(\frac{1}{n}) = \frac{\lambda}{n}$  et en déduire que  $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = \lambda x$

Montrer qu'il existe un réel  $\lambda$  tel que  $\forall x \in \mathbb{Q} f(x) = \lambda x$ .

On suppose ici, de plus,  $f$  croissante : Montrer qu'alors  $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = \lambda x$ .

[Indications : Soit  $x$  fixé. Etudier  $A_x = \{a \in \mathbb{Q}, a \leq x\}$  : sa borne sup est  $x$  et  $f(x) \geq \lambda x$ . Puis envisager  $-x$ ]

