Chap 4

Réduction géométrique

I Sous-espaces stables

1) Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et u un endomorphisme de E. Un sous-espace $F \subset E$ est <u>stable</u> par u si $u(F) \subset F$, i.e. $\forall x \in F, u(x) \in F$.

Par exemple, $E = \mathbb{R}[X]$, $u(P) = P'$ et $F = \mathbb{R}_n[X]$.

Un autre : $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a deux sous-espaces stables : $\mathrm{vect}(e_1, e_4)$ et $\mathrm{vect}(e_2, e_3)$.

<u>Proposition</u>

Si $F_1, F_2 \subset E$ sont stables par u, alors $F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2$ aussi.

<u>Dem</u>

Soit $f = f_1 + f_2 \in F_1 + F_2$, alors $u(f) = u(f_1) + u(f_2) \in F_1 + F_2$.

Soit $f \in F_1 \cap F_2$, alors $f \in F_1 \Rightarrow u(f) \in F_1$, de plus $f \in F_2 \Rightarrow u(f) \in F_2$.
On a montré $u(f) \in F_1 \cap F_2$. $\boxed{3}$

<u>Proposition</u>

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\ker(u - \lambda id)$ et $\mathrm{Im}(u - \lambda id)$ qui sont stables par u. En particulier, $\ker u$ et $\mathrm{Im}\, u$.

<u>Dem</u>

Si $x \in \ker(u - \lambda id)$, i.e. $u(x) - \lambda x = 0$, alors regardons si $u(x) \in \ker(u - \lambda id)$. On a $u(u(x)) - \lambda u(x) = u(\lambda x) - \lambda u(x) = 0$.

Si $x \in \mathrm{Im}(u - \lambda id)$, alors $x = u(y) - \lambda y$ pour un $y \in E$. Donc $u(x) = u(u(y)) - \lambda u(y) = u(z) - \lambda z$, et $u(x) \in \mathrm{Im}(u - \lambda id)$. ∎

<u>Proposition</u>

Si u et v commutent, alors $\ker v$ et $\mathrm{Im}\, v$ sont stables par u.

<u>Dem</u>

Si $x \in \ker v$, alors $v(x) = 0$, donc $v(u(x)) = u(v(x)) = u(0) = 0$ et donc $u(x) \in \ker v$.

Si $x \in \mathrm{Im}\, v \Rightarrow x = v(y)$, donc $u(x) = u(v(y)) = v(u(y)) = v(z) \in \mathrm{Im}\, v$. ∎

<u>Remarque</u> : Si u commute avec v, alors u commute avec $v - \lambda id$.

2) <u>Endomorphisme induit</u>

Si $F \subset E$ est un sous-espace stable par u, on peut considérer la restriction u_F de u sur F. C'est alors un endomorphisme de F. On l'appelle <u>endomorphisme induit</u> par u sur F.

Par exemple, $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F = \mathrm{vect}\{e_1, e_4\}$ devient $u_F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition

Si F est stable par u et v, si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors F est stable par $\lambda u + v$ et $u \circ v$. De plus $(\lambda u + v)_F = \lambda u_F + v_F$ et $(u \circ v)_F = u_F \circ v_F$.

Dem

Si $x \in F$, alors $(\lambda u + v)(x) = \lambda u(x) + v(x) \in F$ car F s.e.v.
De même $v(x) \in F$, donc $u(v(x)) \in F$.

Le reste est trivial. $\blacksquare$

Proposition

$\boxed{\operatorname{Ker}(u_F) = \operatorname{Ker}(u) \cap F \text{ et } \operatorname{Im}(u_F) \subset \operatorname{Im}(u) \cap F.}$

Dem

Si $x \in \operatorname{Ker}(u_F)$ alors $x \in F$ et $u(x) = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker}(u) \cap F$. Inversement, si $x \in \operatorname{Ker}(u) \cap F$ alors $x \in F$ et $u_F(x) = u(x) = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker}(u_F)$.

Si $x \in \operatorname{Im} u_F \Rightarrow \exists y \in F$ tq $x = u_F(y) = u(y) \Rightarrow x \in \operatorname{Im} u$ mais aussi $x \in F$. $\Rightarrow x \in \operatorname{Im} u \cap F$. $\blacksquare$

L'égalité $\operatorname{Im}(u_F) = \operatorname{Im}(u) \cap F$ est fausse :

$E = \mathbb{R}[X]$, $u(P) = P'$, $F = \mathbb{R}_n[X]$. Alors $\operatorname{Im} u = E$, $\operatorname{Im} u \cap F = \mathbb{R}_n[X]$, pourtant $\operatorname{Im} u_F = \mathbb{R}_{n-1}[X] \subsetneq \mathbb{R}_n[X]$.

Corollaire

Si u est injectif alors u_F aussi. Par contre si u est surjectif, on ne peut rien dire sur la surjectivité de u_F.

3) Visualisation en dim. finie.

Théorème

Soit $F \subset E$, un sous-espace dont on choisit une base $\{e_1, \dots, e_p\}$. On complète en une base $\{e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n\}$ de E. Alors

i) F est stable par u

si et seulement si

ii) $\text{Mat}\, u = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

Dans ce cas, $A = \text{Mat}\, u_F$.

Dem

i) $\Rightarrow$ ii)

Si F stable par u, alors $u(e_1) \in F$ donc il s'écrit comme c.l. de $e_1, \dots, e_p$ seulement $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & & \\ \vdots & & \\ a_{p1} & & \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$ etc

ii) $\Rightarrow$ i) $\forall\, i = 1, \dots, p$ on a $u(e_i) = $ c.l. $e_1, \dots, e_p \Rightarrow u(e_i) \in F$.

Tout $x \in F$ s'écrit $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \Rightarrow u(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u(e_i) \in F$.

Le reste est évident. $\boxtimes$

Théorème

> Soit $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_q$ et $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette décomposition.
> Alors
> i) Chaque F_i est stable par u
> si et seulement si
> ii) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_q \end{pmatrix}$ où chaque $A_i \in M_{d_i}(\mathbb{K})$ et $d_i = \dim F_i$.

<u>Dem</u> (exercice).

<u>Réduire un endomorphisme</u> c'est essayer de trouver une base dans laquelle u a cette forme, avec les A_i les plus simples possibles ; essayer de rendre u la plus diagonale possible.

II Eléments propres

1) Valeurs propres, vecteurs propres.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, un <u>vecteur propre</u> pour u est un vecteur $v \in E$, <u>$v \neq 0$</u>, tel que il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ vérifiant $u(v) = \lambda v$.
On dit que λ est une <u>valeur propre</u> de u.

Le λ associé à v est forcément unique car si $u(v) = \lambda v = \mu v$
$\Rightarrow (\lambda - \mu) v = 0$, or $v \neq 0 \Rightarrow \lambda = \mu$.

On dit que λ est la <u>valeur propre associée</u> à v.

Par contre, pour une valeur propre donné, rien n'empêche qu'il y ait plusieurs vecteurs propres.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des valeurs propres de u s'appelle le <u>spectre</u> de u. On le note <u>$Sp(u)$</u>.

2) Sous-espaces propres

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda\, id)$. C'est le sous-espace des vecteurs $v \in E$ tels que $u(v) = \lambda v$.

<u>Théorème</u>

Il y a équivalence entre :

i) λ est v.p. de u.

ii) $E_\lambda(u) \neq \{0\}$

iii) $u - \lambda\, id$ n'est pas injectif.

<u>Dem</u>

<u>i) ⇒ ii)</u> $\exists v \neq 0$ tq $u(v) = \lambda v \Rightarrow v \in E_\lambda(u) \setminus \{0\}$.

<u>ii) ⇒ iii)</u> $\operatorname{Ker}(u - \lambda\, id) \neq \{0\} \Rightarrow u - \lambda\, id$ non injectif.

<u>iii) ⇒ i)</u> $\exists v \neq 0$ tq $v \in \operatorname{Ker}(u - \lambda\, id) \Rightarrow u(v) = \lambda v$ et $\lambda \in Sp(u)$. ∎

Si λ est valeur propre pour u, alors $E_\lambda(u)$ est le <u>sous-espace propre</u> associé à λ. C'est l'ensemble des vecteurs propres de u

associés à la v.p. λ.

3) Stabilité des sous espaces propres.

Théorème

Les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ de u sont stables par u, et on a $u_{E_\lambda(u)} = \lambda \, id$.

Corollaire

Si u et v commutent alors les sous-espaces propres de v sont stables par u.

Proposition

Des sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_k}(u)$, associés à des v.p. $\neq$ sont toujours en somme directe.

Dem

Par récurrence sur k. Pour $k=1$, rien à démontrer. Supposons vrai pour k. Disposons de $E_{\lambda_{k+1}}(u)$ un autre espace propre. On sait que les $\cap$ 2 à 2 sont $\{0\}$. Supposons $x_1 + \dots + x_k + x_{k+1} = 0$, avec $x_i \in E_{\lambda_i}$. Alors en appliquant u : $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{k+1} x_{k+1} = 0$

$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) x_1 + \dots + (\lambda_k - \lambda_{k+1}) x_k = 0$. Mais les $(\lambda_i - \lambda_{k+1}) x_i$ appartiennent à E_{λ_i}, donc par hyp. de réc. $(\lambda_i - \lambda_{k+1}) x_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, k$. $(\Rightarrow x_i = 0.)$.

Du coup $x_{k+1} = 0$.

Corollaire

Toute famille finie de vecteurs propres de u, pour des valeurs propres distinctes, est une famille libre.

En dimension n, un endomorphisme u ne peut pas avoir plus de n valeurs propres.

(en dim. infinie, un endomorphisme peut très bien avoir une infinité de valeurs propres).

4) Quelques cas en dim infinie

- $E = \mathbb{R}[X]$, $u(P) = P'$. Alors $\lambda \in Sp(u) \iff u(P) = \lambda P \iff P' = \lambda P$.

$\Rightarrow P = cst$ et $\lambda = 0$, $Sp(u) = \{0\}$.

- $E = \mathbb{R}[X]$, $u(P) = XP'(X)$.

$$XP'(X) = \lambda P(X) \iff \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} k a_k X^k$$

$\iff \lambda a_k = k a_k \; \forall k$. Comme $a_n \neq 0 \Rightarrow \lambda = n$, et par suite $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$. On a donc $sp(u) = \mathbb{N}$, les vecteurs propres associés à $\lambda = n$ sont les $a_n X^n$.

- $E = \mathbb{R}[X]$ et $u(P) = XP(X)$.

$u(P) = \lambda P$ est impossible car $d° XP(X) > d°P$. (sauf $P = 0$ qui est exclu)

Donc $sp(u) = \emptyset$.

- $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $D : f \mapsto f'$.

$Df = \lambda f \iff f' = \lambda f \iff f(x) = \alpha e^{\lambda x}$. Donc $sp(D) = \mathbb{R}$.

- $E = \{$suites bornées$\}$, $T(u_n) = (u_{n+1})$

$T(u) = \lambda u \iff u_{n+1} = \lambda u_n \ \forall n. \Rightarrow u_n = \lambda^n u_0$

Pour que la suite soit bornée il faut $|\lambda| \leq 1 \Rightarrow sp(u) = [-1, 1]$.

III Eléments propres en dimension finie

1) Eléments propres d'une matrice (carrée)

On dit que λ est v.p. de $A \in M_n(\mathbb{K})$ si il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $AX = \lambda X$ et $X \neq 0$.

On dit que X est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

L'ens. des valeurs propres de A est le spectre de A, noté $Sp(A)$.

On note $E_\lambda(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$, l'espace des solutions de l'équation $AX = \lambda X$.

Si λ est v.p. de A, alors $E_\lambda(A)$ est le sous-espace propre de A, associé à la v.p. λ.

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie non nulle, soit $\mathcal{B}$ une base de E. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, en notant $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $X = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, on a

$$Sp(A) = Sp(u) \text{ et } \forall \lambda \in Sp(u),\ x \in E_\lambda(u) \iff X \in E_\lambda(A).$$

Rien à démontrer ...

Corollaire

Deux matrices semblables ont même spectre.

Dem

Car elles représentent le même endomorphisme. $\boxtimes$

2) Polynôme caractéristique d'une matrice.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\det(A - xI_n)$ est un polynôme en x.

On note χ_A le polynôme $\in \mathbb{K}[X]$ donné par

$$\chi_A(x) = \det(xI_n - A) \quad , \forall x \in \mathbb{K}.$$

C'est le polynôme caractéristique de A.

Exemple : • $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\chi_A(x) = \det(xI_n - A) = \det\begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ -3 & x-4 \end{pmatrix} =$

$$= (x-1)(x-4) - 6 = x^2 - 5x - 2.$$

• Si A est diagonale : $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - x)$.

Théorème

Le polynôme caractéristique de A est unitaire, de degré n et possède les coefficients remarquables suivants :

$$\chi_A(X) = X^n - \mathrm{tr}(A) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A.$$

Dem

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \left(X\delta_{\sigma(i),i} - a_{\sigma(i),i} \right)}_{P_\sigma(X)}.$$

Si $\sigma \neq id$, alors il existe au moins deux éléments $k,\ell \in \{1,\dots,n\}$ tq $\sigma(k)\neq k$ et $\sigma(\ell)\neq \ell$. Dans ce cas $P_\sigma(X)$ est de $d^\circ \leq n-2$ car au moins deux termes $\delta_{\sigma(i),i}$ sont nuls.

Si $\sigma = id$, alors $P_\sigma(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - a_{ii}) = X^n - (a_{11}+\dots+a_{nn})X^{n-1} + \dots$

Donc $\det(XI_n - A) = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \dots$

Enfin, $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$. D'où $\chi_A(X) = \dots + (-1)^n \det A$. $\blacksquare$

Matrice compagnon :

Soit $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0$. Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$

Alors $\chi_A(X) = \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & & -a_0 \\ -1 & X & & & -a_1 \\ 0 & -1 & X & \cdots & -a_2 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & X & -a_{n-2} \\ & & & -1 & X-a_{n-1} \end{vmatrix}$

$$= X \begin{vmatrix} X & \cdots & & -a_1 \\ -1 & X & \cdots & -a_2 \\ & -1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots\ X & \\ & & -1 & X-a_{n-1} \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ -1 & X & \cdots & -a_2 \\ 0 & -1 & X & \cdots \\ & & \ddots & X \\ & & -1 & X-a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= X(\text{idem } a_1,\dots,a_{n-1}) + \begin{vmatrix} 0 & \cdots & & -a_0 \\ -1 & X & \cdots & -a_3 \\ & \ddots & X & \\ & & -1 & X-a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= X(\text{idem } a_1,\dots,a_{n-1}) + (-1)^{n-1}(-a_0)\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & X & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & X \\ & & & -1 \end{vmatrix}}_{(-1)^{n-3}}$$

$$= X(\text{idem } a_1,\dots,a_{n-1}) - a_0.$$

Recurrence : $\begin{vmatrix} X & -a_0 \\ -1 & X-a_1 \end{vmatrix} = X(X-a_1) - a_0 = X^2 - a_1X - a_0$

$$\Rightarrow X(X^{n-1} - a_{n-1}X^{n-2} - \dots - a_1) - a_0 = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0.$$

Donc $\chi_A(X) = P(X)$.

Théorème

> Les valeurs propres de A sont exactement les racines de χ_A.

Dem

$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \Leftrightarrow A - \lambda I_n$ non inversible

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$

Or $\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \det(\lambda I_n - A) = (-1)^n \chi_A(\lambda)$.

Donc $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$. ∎

Corollaire

> - $A \in M_n(\mathbb{K})$ possède au plus n valeurs propres
> - $A \in M_n(\mathbb{C})$ possède au moins une valeur propre (dans $\mathbb{C}$)
> - $A \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ possède au moins une v.p. réelle.

3) Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Prop

$\boxed{\text{Deux matrices semblables ont même pol. caract.}}$

Dem

$$B = P^{-1}AP \Rightarrow \chi_B(X) = \det(XI - P^{-1}AP) = \det\left(P^{-1}(XI_n - A)P\right) =$$
$$= \det(XI_n - A) = \chi_A(X). \quad \blacksquare$$

Du coup, le polynôme caractéristique de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$. On le note χ_u, polynôme caractéristique de u.

- Soit $E = F \oplus G$, on veut le pol. carac. de la proj. p sur F, parallèlement à G. Dans une base adaptée à $F \oplus G$, la matrice de p devient $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$

Donc $\chi_p(X) = (X-1)^r X^{n-r}$.

Théorème

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, le polynôme caractéristique χ_u est unitaire de degré exactement $n = \dim E$. Il est de la forme
$$\chi_u(X) = X^n - \mathrm{tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det u.$$
Les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u.
Un endom. u possède au plus $n = \dim E$ valeurs propres.
Si E est un $\mathbb{C}$-e.v. de dim finie, alors tout $u \in \mathcal{L}(E)$ possède au moins une v.p.

4) Multiplicité d'une valeur propre

<u>Rappel</u> : Si $P \in \mathbb{K}[X] \not\equiv 0$, on appelle <u>multiplicité</u> de la racine λ de P, le plus grand $\alpha \in \mathbb{N}$ tq $(X-\lambda)^\alpha \mid P$.

C'est équivalent à $P(\lambda) = P'(\lambda) = \dots = P^{(\alpha-1)}(\lambda) = 0$ et $P^{(\alpha)}(\lambda) \neq 0$.

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est <u>scindé</u> dans $\mathbb{K}[X]$, ssi on peut le factoriser sous la forme $P(X) = \mu \prod_{i=1}^{n} (X-\lambda_i) = \mu \prod_{i=1}^{m} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ si on regroupe les racines égales.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle <u>multiplicité</u> de λ comme v.p. de u, sa multiplicité comme racine de χ_u. On la note $m_\lambda(u)$.

<u>Théorème</u>

$\forall u \in \mathcal{L}(E)$, on a $\sum_{\lambda \in Sp(u)} m_\lambda(u) \leq \dim E$, avec égalité ssi χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

<u>Dem</u>

Le fait que $\sum_{\lambda \in Sp(u)} m_\lambda(u) \leq \dim E$ est évident.

Si χ_u est scindé $\Rightarrow \sum_{\lambda \in Sp(u)} m_\lambda(u) = \dim E$.

Si χ_u n'est pas scindé, il contient des morceaux irréductibles de $d° \geq 2$, donc la somme des mult. des termes en $(X-\lambda_i)$ est $< \dim E$. $\boxed{\Sigma}$

<u>Corollaire</u>

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors tout $u \in \mathcal{L}(E)$ possède exactement n v.p. complexes avec multiplicité.

5) Multiplicité et dimension des sous-espaces propres.

Théorème

> Si F est un sous-espace stable par u alors $\chi_{u_F} \mid \chi_u$.

Dem

Dans une base adaptée on a $A = \begin{pmatrix} A_F & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A = \text{mat}\, u$,
et $A_F = \text{Mat}\, u_F$. Donc

$$\det(A - \lambda I) = \det(A_F - \lambda I)\det(C - \lambda I).$$

i.e. $\chi_u(\lambda) = \chi_{u_F}(\lambda)\, Q(\lambda)$.

(On a besoin de $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \det C$:

$$\sum_{\sigma \in S_{p+q}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{p+q} M_{\sigma(i),i}, \text{ Mais } M_{\sigma(i),i} = 0 \text{ si } \begin{cases} i \leq p \\ \sigma(i) > p \end{cases}$$

Donc $\prod_{i=1}^{p+q} M_{\sigma(i),i} = 0$ dès que $\exists\, i \leq p$ avec $\sigma(i) > p$.

Il ne reste que les σ tq $\sigma(i) \leq p \;\; \forall i \leq p \Rightarrow \sigma_{|\{1,\dots,p\}} \in \mathcal{S}_p$ et $\sigma = \sigma_p \circ \sigma_q$

D'où $\det M = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathcal{S}_p} \sum_{\tau \in S_q} \varepsilon(\omega \circ \tau) \prod_{i=1}^{p} A_{\omega(i),i} \prod_{j=1}^{q} C_{\tau(j),j}$

$$= \left(\sum_{\omega \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(\omega) \prod_{i=1}^{p} A_{\omega(i),i} \right) \left(\sum_{\tau \in S_q} \varepsilon(\tau) \prod_{j=1}^{q} C_{\tau(j),j} \right). \;\; \checkmark \;\;)$$

Théorème

> $\forall \lambda \in Sp(u)$, on a
>
> $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)$.

Dem

$E_\lambda(u)$ est stable par u, donc $\chi_{u_{E_\lambda(u)}} \mid \chi_u$.

Mais $\chi_{u_{E_\lambda(u)}}(X) = (X-\lambda)^{\dim E_\lambda(u)}$ car $u_{E_\lambda(u)} = \lambda \, Id_{E_\lambda(u)}$.

Donc $\dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)$.

De plus, si $\lambda \in Sp(u) \Rightarrow \dim E_\lambda(u) \geq 1$. ∎

Corollaire

Si $m_\lambda(u) = 1$ alors $\dim E_\lambda(u) = 1$.

6) Changement de corps

Si on a 2 corps tq $\mathbb{L} \subset \mathbb{K}$, et que $A \in M_n(\mathbb{L})$, alors aussi $A \in M_n(\mathbb{K})$.
On peut regarder les v.p. de A dans $\mathbb{L}$, mais aussi dans $\mathbb{K}$.

Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$.

On a $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$, donc $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$.

Théorème

Les v.p. complexes d'une matrice réelle sont 2 à 2 conjuguées.
De plus, deux racines complexes conjuguées ont même multiplicité et les sous-espaces propres se correspondent par conjugaison.

Dem

La première assertion est évidente car $\chi_u \in \mathbb{R}[X]$.
Comme il en est de même pour $\chi_u', \chi_u'', \dots, \chi_u^{(k)}$, on en déduit le

résultat sur la multiplicité.

Si $v \in E_\lambda(u)$ alors $Av = \lambda v$ donc $\bar{A}\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v} \Rightarrow A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$ et $\bar{v} \in E_{\bar{\lambda}}(u)$.
Idem dans l'autre sens.

$\boxed{B}$

Corollaire

Dans ce cas ($u \in M_n(\mathbb{R})$) alors $\dim E_\lambda(u) = \dim E_{\bar{\lambda}}(u)$.

IV Diagonalisabilité

1) Endomorphisme diagonalisable

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est <u>diagonalisable</u> si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

id_E est diagonalisable dans toute base de E

Les projecteurs de E sont diagonalisables, on l'a vu précédement.

Thm

Il y a équivalence entre

i) u est diagonalisable

ii) il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

Evident ✓.

Thm

Si $\dim E = n$ et si $u \in \mathcal{L}(E)$ possède n v.p. distinctes alors u est diagble.

Dem

On a n v.p. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ avec $m_{\lambda_i}(u) = 1$ $\forall i$. Donc $\dim E_{\lambda_i}(u) = 1$ $\forall i$. En prenant $v_1, \dots, v_n$ dans $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_n}(u)$ resp. on a une base de E faite de $\vec{v}$.p. de u.

$\boxed{S}$

2) Diagonalisabilité et sous-esp. propres.

Thm

Il y a équivalence entre

i) u est diagble

ii) $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$

iii) $\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$.

Tout est évident.

Corollaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre

i) u est diagble

ii) χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et $\forall \lambda \in Sp(u)$, $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u)$.

Dem

Si u est diagble, alors $\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$, mais $\dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)$

$\Rightarrow \dim E \leq \sum_{\lambda \in Sp(u)} m_\lambda(u) \leq \dim E \Rightarrow \sum_{\lambda \in Sp(u)} m_\lambda(u) = \dim E \Rightarrow \chi_u$ est scindé!

et forcement $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u)$.

Inversement, si χ_u scindé et $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u)$ alors $\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u)$

$= \sum_{\lambda \in Sp(u)} m_\lambda(u) = \dim E \Rightarrow u$ diagble.

3) Matrice diagble

Une matrice A est diagble si elle est semblable à une matrice diagonale, i.e. $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ et D diagonale tq $P^{-1}AP = D$, i.e. $A = PDP^{-1}$.

Thm

Si $A = Mat_\mathcal{B}\, u$ pour $u \in \mathcal{L}(E)$ alors il y a équivalence entre
(i) A diagble
(ii) u diagble.

Evident ✓

Du coup on a direct:

Thm

$A \in M_n(\mathbb{K})$, on a équivalence entre

i) A est diagble

ii) $\bigoplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}(A) = \mathbb{K}^n$

iii) $n = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim E_\lambda(A)$

iv) χ_A est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et $\forall \lambda \in Sp(A)$, $\dim E_\lambda(A) = m_\lambda(A)$

Corollaire

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ admet n v.p. distinctes alors A est diagble.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}).$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\chi_A(X) = X^2 - 2X + 2$ pas scindé, donc A pas diagble

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $Sp(A) = \{1+i, 1-i\}$. Diagble.

$$\begin{cases} x - y = (1+i)x \\ x + y = (1+i)y \end{cases} \iff \begin{cases} y = -ix \\ iy = x \end{cases} : \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y = (1-i)x \\ x + y = (1-i)y \end{cases} \iff \begin{cases} y = ix \\ \quad // \end{cases} \quad \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

$\chi_A(X) = (X-1)^2(X-2)$

$Sp(A) = \{1,2\}$.

$\dim E_2(A) = 1$, on le sait déjà. Le pb c'est $E_1(A)$:

$\ker(A-I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dim E_1(A) = 1$.

Pas diagble.

V Trigonalisabilité

1) Endomorphisme trigonalisable

Un endomorphisme u de E est <u>trigonalisable</u> s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. Une telle base est dite <u>base de trigonalisation</u> pour u.

<u>Remarques</u> : • si u est diagonalisable, alors il est trigonalisable.
• si u est triangulaire inférieure dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$, alors il est triangulaire supérieure dans $\{e_n, \dots, e_1\}$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f & e & c \\ 0 & d & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ etc...}$$

<u>Proposition</u>

Il y a équivalence entre

i) u est trigble dans $\{e_1, \dots, e_n\}$

ii) $\forall 1 \leq k \leq n$, vect$\{e_1, \dots, e_k\}$ est stable par u.

évident ✓

Le premier vecteur est forcément un $\vec{v}.p.$ pour u.

2) Matrice trigonalisable

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est trigoble si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Thm

Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$, il y a équivalence entre

i) A est trigoble

ii) u est trigble.

3) Caractérisation

Thm

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, il y a équivalence entre

i) u est trigble

ii) χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Dem

i) ⇒ ii)

Si $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors $\chi_u(X) = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n)$ et donc χ_u est scindé.

ii) ⇒ i) Par récurrence sur n, en regardant la matrice associée.

Si $n=1$, rien à montrer.

Si vrai pour n, soit $A \in M_{n+1}(\mathbb{K})$. Comme χ_u est scindé il possède au moins une racine $\lambda_1 \in Sp(A)$. Soit e_1 un $\vec{v}$.p. de A pour λ_1.

On complète la base $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ et on obtient

$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$. On a $\underset{\chi_A(X)}{\underset{\shortparallel}{\chi_{A'}(X)}} = (X-\lambda_1)\chi_B(X)$. Donc χ_B est scindé.

On applique l'hypothèse de récurrence : il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $P^{-1}BP = T$ triang. sup. On pose $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$, elle est inversible, d'inverse $P'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$ et on a $P'^{-1}AP' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$ ∎

Corollaire

Tout endom. d'un $\mathbb{C}$-e.v est trigobable.

Corollaire

Si χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ alors $\mathrm{tr}(u)$ et $\det(u)$ sont la somme et le produit des v.p. de u comptées avec multiplicité.

Dem

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix} \Rightarrow \chi_u(X) = \prod_{i=1}^{n} (X-\lambda_i)$$

etc... ∎

4) Trigonalisation

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ tq χ_A soit scindé dans $\mathbb{K}[X]$. Pour trigonaliser A, on détermine λ_1 une v.p. de A et e_1 un $\vec{v}$.p associé.

On définit une matrice de passage Q qui a e_1 comme 1ère colonne.

On a alors $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & A'\end{pmatrix}$ avec A' trigonalisable. On recommence avec A'.

$$A = \begin{pmatrix}-1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}, \quad \chi_A(X) = \begin{vmatrix}-1-X & 0 & -1 \\ 2 & -3-X & -5 \\ -1 & 1 & 1-X\end{vmatrix} = (-1-X)\big[(-3-X)(1-X)+5\big] - \big(2-(3+X)\big)$$

$$= (-1-X)\big[X^2+2X+2-1\big] = -(1+X)\,(X+1)^2 = -(X+1)^3 \Rightarrow Sp(A) = \{-1\}.$$

Elle est trigble, sans être diagble car $\neq -I_3$.

On cherche un $\vec{v}$.p. pour $\lambda_1 = -1$: $AX = -X \iff \begin{cases}-x-z = -x \\ 2x-3y-5z = -y \\ -x+y+z = -z\end{cases}$

$$\iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}$$

On prend $Q = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix}-1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

On regarde $A' = \begin{pmatrix}-3 & -4 \\ 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-3x-4y = -x \\ x\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}2 \\ -1\end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix}2 & 0 \\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$$P'^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = QR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5) Nilpotence

On endom. u est nilpotent si il existe $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $u^p = 0$.
Le plus petit tel p est l'indice de nilpotence de u.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \nabla \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \Big| \begin{matrix} 1 \\ p \\ n \end{matrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \nabla_{p-1} \end{pmatrix}, \dots, A^{p+1} = 0.$$

Thm

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Equiv.} \\ \text{i) } u \text{ est nilpotent} \\ \text{ii) } u \text{ est trigble et } 0 \text{ est sa seule v.p.} \\ \text{Dans ce cas, Mat } u \text{ prend une forme triang. stricte.} \end{array}}$$

ii) ⇒ i) on a déjà vu.

i) ⇒ ii) $\text{Mat}\, u = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ etc... ∎

Rem Le pol. carac est forcément X^n.

Chap 5

Réduction algébrique

I Polynômes d'endomorphisme.

1) Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $u^k = u \circ \dots \circ u$ (k fois) et $u^0 = id$.

Si $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, alors on pose

$$P(u) = \sum_{k=0}^{N} a_k u^k.$$

C'est encore un endomorphisme de E.

Une $\mathbb{K}$-algèbre : $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ sur un corps $\mathbb{K}$ tq $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un e.v., et en plus un produit interne $\times$, avec les règles usuelles : associatif, distributif sur $+$ et c'est tout... pas forcément d'unité, pas forcement commutatifs...

$\mathcal{L}(E)$ est une algèbre, $M_n(\mathbb{K})$ aussi, $\mathbb{K}[X]$ aussi.

Proposition

L'application $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$, $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbre