Réduction des endomorphismes 2.

.

Trigonalisation

Il est parfois utile (par exemple si un endomorphisme n'est pas diagonalisable) de chercher une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.

2.1. Lemme. Toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

On a vu que les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses éléments diagonaux $\lambda_1, ..., \lambda_n$ et son polynôme caractéristique est

$p_A(x) = (-1)^n \Pi_{i=1}^n (x - \lambda_i)$.

2.2. Définition. Un endomorphisme est **trigonalisable** si il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire (supérieure ou inférieure).

2.3. Théorème. Un endomorphisme est trigonalisable dans K si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans K.

Plus précisement:

- $K = \mathbf{C}$: tout endomorphisme est trigonalisable dans $\mathbf{C}$.

- $K = \mathbf{R}$: un endomorphisme est trigonalisable dans $\mathbf{R}$ si et seulement si toutes les racines complexes de son polynôme caractéristique sont réelles.

.

2.4. Corollaire. Tout endomorphisme nilpotent est trigonalisable.

.

La trigonalisation dans $\mathbf{C}$ permet de calculer rapidement les valeurs propres des puissances de A:

2.5. Proposition. Soit $p_A(x) = (-1)^n \Pi_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ la factorisation de p_A dans $\mathbf{C}$. Alors $p_{A^k}(x) = (-1)^n \Pi_{i=1}^n (x - \lambda_i^k)$.

De manière plus générale, soit $q(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_k t^k$,

$q(A) = a_0 + a_1 A + ... + a_k A^k$. Alors $p_{q(A)}(x) = (-1)^n \Pi_{i=1}^n (x - q(\lambda_i))$.

La démonstration consiste à remarquer que si A est semblable à une matrice triangulaire T avec les éléments diagonaux $\lambda_1, ..., \lambda_n$, alors $q(A)$ est semblable à la matrice triangulaire $q(T)$ avec les éléments diagonaux $q(\lambda_1), ..., q(\lambda_n)$.

2.4. Corollaire. Les valeurs propres réelles de la matrice $q(A)$ sont les nombres réels dans la liste $q(\lambda_1), ..., q(\lambda_n)$.

.

Remarque 1. Les coefficients du polynôme caractéristique

$p_A(x) = (-1)^n x^n + c_1 x^{n-1} + ... + c_{n-1} x + c_n = (-1)^n \Pi_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ sont liés avec ses racines par les formules de Vieta: $c_k = (-1)^{n-k} \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} \lambda_{i_1} ... \lambda_{i_k}$.

.

On sait que $tr(A) = \sum_1^n \lambda_i$; on en déduit que $tr(A^k) = \sum_1^n \lambda_i^k$.

Remarque 2. Les traces des puissances $s_k = tr(A^k)$ sont liées avec les coefficients du polynôme caractéristique

$p_A(x) = (-1)^n x^n + c_1 x^{n-1} + ... + c_{n-1} x + c_n$ par les *formules de Newton:*

$$(-1)^n s_k + c_1 s_{k-1} + ... + c_{k-1} s_1 + k c_k = 0$$

$k = 1, 2, ..., n$. Cela permet d'exprimer les c_k en termes des s_k (ou réciproquement) par récurrence.

.

Sommes directes.

2.5. Définition. Soit E un espace vectoriel sur K et $E_1, ..., E_k$ des sous-espaces vectoriels de E. La **somme** $E_1 + ... + E_k$ est le sous-espace formé de tous les vecteurs $v = v_1 + ... + v_k$ où $v_i \in E_i$. La somme est **directe** (noté $E_1 \bigoplus ... \bigoplus E_k$) si une telle décomposition est **unique:** si $v = v_1 + ... + v_k = u_1 + ... + u_k$ avec $v_i \in E_i$ et $u_i \in E_i$ alors $v_i = u_i$, $(i = 1, ..., k)$.

2.6. Proposition. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. La somme $E_1 + ... + E_k$ est directe.
2. La relation $v_1 + ... + v_k = 0$ où $v_i \in E_i$ entraine $v_1 = 0$, ... , $v_k = 0$.
3. Soit B_1, ... , B_k des bases des sous-espaces $E_1, ..., E_k$. Alors leur réunion $B = B_1 \cup ... \cup B_k$ est libre et donc est une base de la somme $E_1 + ... + E_k$ (base adaptée).
4. On a $E_i \cap (E_1 + ... + E_{i-1}) = \{0\}$ pour $i = 2, ..., n$.
5. Soit dim $(E) < \infty$, alors dim $(E_1 + ... + E_k) =$ dim$E_1 + ...+$ dimE_k.

.

Noter: la somme de deux sous-espaces E_1 et E_2 est directe si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Exemple: soit $e_1, ..., e_k$ des vecteurs non-nuls de E. La somme $Ke_1 + ... + Ke_k$ est directe si et seulement si les vecteurs $e_1, ..., e_k$ sont linéairement indépendants. On a $E = Ke_1 \bigoplus ... \bigoplus Ke_k$ si et seulement si $(e_1, ..., e_k)$ est une base de E.

.

Projecteurs associés à une somme directe.

Soit $E = E_1 \bigoplus ... \bigoplus E_k$. Soit Π_i la projection sur le sous-espace E_i parallèlement à la somme des autres sous-espaces: Π_i est défini par $\Pi_i(v) = v$ si $v \in E_i$ et $\Pi_i(v) = 0$ si $v \in E_j$ avec $j \neq i$.

On a les propriétés évidentes:

1. $\Pi_1 + .. + \Pi_k = Id$.
2. $\Pi_i \Pi_j = \Pi_j \Pi_i$.
3. $\Pi_i^2 = \Pi_i$.

Sous-espaces stables. Décomposition en blocs.

2.7. Définition. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. Un sous-espace F de E est **stable** ou **invariant** par f si $f(F) \subset F$, (donc, si pour tout $v \in F$ on a $f(v) \in F$).

A noter: $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces stables par f.

2.8. Lemme. Si g commmute avec f, $fg = gf$, alors $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont des sous-espaces stables par f.

[En particulier, on peut prendre $g = a_0 Id + a_1 f + ... + a_k f^k$.]

Si F est stable par f, on définit **l'endomorphisme unduit** $f_F : F \to F$ par $f_F(v) = f(v)$ si $v \in F$. (Essentiellement, f_F est la restriction de f sur F.) Dans une base de E où les premiers vecteurs forment une base de F la matrice de f est triangulaire par blocs.

2.9. Corollaire. Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit f_F divise le polynôme caractéristique de f.

[Cela a comme conséquence que la dimension de l'espace propre E_λ ne dépasse pas la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique.]

Soit E la somme directe des sous-espaces stables par f, $E = E_1 \bigoplus ... \bigoplus E_k$; soit f_i l'endomorphisme induit dans E_i. Alors l'étude de f se réduit à l'étude de chaque f_i séparement: f est une sorte la "somme direct des blocs" f_i. La matrice de f dans une base adaptée est diagonale par blocs, le i-ème bloc diagonal étant la matrice de f_i. Un des objectifs de la réduction est de décomposer f en blocs de taille minimum (blocs"indécomposables").

Remarque. Si E est la somme directe des sous-espaces stables par f, $E = E_1 \bigoplus ... \bigoplus E_k$, le polynôme caractéristique de f est le produit des polynômes caractéristiques des endomorphismes f_i induits dans E_i ($i = 1, ..., k$). Donc la décomposition de f en blocs est liée à la factorisation du polynôme caractéristique de f.