Réduction des endomorphismes.

.

Diagonalisation

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K et f un endomorphisme de E. Le but de réduction est de chercher des bases dans E dans lesquelles la forme de la matrice associée à f est la plus simple possible. Si f est déja donné par une matrice $A = M_B(f)$ dans une base B, il s'agit de passer à une autre base B' de façon à ce que la nouvelle matrice $A' = M_{B'}(f) = P^{-1}AP$ soit "simple".

La forme la plus simple d'une matrice est la forme diagonale.

1.1. Définition: Un endomorphisme est **diagonalisable** si il admet une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

.

Vecteurs propres, valeurs propres

.

Si $B = (e_1, ..., e_n)$ alors $M_B(f) = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ signifie que

$f(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, ..., n$.

1.2. Définition: Un **vecteur propre** de f est vecteur **non-nul** v tel que $f(v)$ est colinéaire à v: $f(v) = \lambda v$; le coefficient de proportionalité λ est la **valeur propre** associée. Un scalaire λ est une **valeur propre** de f s'il existe un vecteur non-nul v tel que $f(v) = \lambda v$.

La matrice de l'endomorphisme dans une base de vecteurs propres est diagonale, avec les valeurs propres sur la diagonale principale.

On a une définition équivalente de l'endomorphisme diagonalisable:

1.1'. Définition: Un endomorphisme est **diagonalisable** si il existe une base de vecteurs propres.

L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle **spectre** de f.

1.3. Théorème. *Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont linéairement indépendants.*

1.4. Corollaire. Soit $n = \dim(E) < \infty$. Alors

1. f admets au plus n valeurs propres;

2. si f admet exactement n valeurs propres (deux à deux distinctes), f est diagonalisable.

.

A la recherche des vecteurs propres: polynôme caractéristique.

Soit $\dim(E) < \infty$. On remarque que λ est une valeur propre si et seulement si $f - \lambda Id$ n'est pas injectif: $Ker(f - \lambda I) \neq \{0\}$. En dimension finie cette condition est équivalente à l'annulation du déterminant:

dét $(f - \lambda Id) = 0$. C'est **l'équation caractéristique** pour les valeurs propres.

[Rappel: $det(f - \lambda Id)$ est défini comme $det(M_B(f) - \lambda I_n)$ par rapport à une base B; noter que I_n est la matrice de l'identité Id dans n'importe quelle base.]

.

1.5. Définition. Le déterminant $p_f(x) =$ dét $(f - xId)$ s'appelle **polynôme caractéristique** de f: c'est est un polynôme en x de degré $n = \dim(E)$.

.

On conclut que **les valeurs propres sont précisement les racines du polynôme caractéristique.**

[Parfois on définit le polynôme caractéristique comme
dét$(xId - f) = (-1)^n p_f(x)$.]

Le polynôme caractéristique d'une matrice A est $p_A(x) =$ dét $(A - xI_n)$. Les matrices semblables A et $P^{-1}AP$ ont le même polynôme caractéristique - en fait, cette propriété permet de définir dét $(f - xId)$.

.

Remarque: on a $p_{f+aId}(x) = p_f(x - a)$. Si f est diagonalisable, $f + aId$ l'est aussi ($a \in K$); les valeurs propres de $f + aId$ s'obtiennent en ajoutant a aux valeurs propres de f.

.

Structure du polynôme caractéristique

.

1.6. Soit $p_A(x)$ =dét $(A - xI_n) = (-1)^n x^n + c_1 x^{n-1} + ... + c_{n-1}x + c_n$.

1. Les coefficients $c_1, ..., c_n$ sont des polynômes en éléments matriciels a_{ij} de A; c_k est un polynôme homogène de degré k.
2. $c_1 = (-1)^{n-1} trace(A) = (-1)^{n-1} trace(f)$
3. $c_n =$ dét(A).
4. c_k est invariant par similitude: c_k est le même pour A et $P^{-1}AP$.

1.7. Polynôme caractéristique d'une matrice diagonale: si
$A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, alors $p_A(x) = (-1)^n \Pi_{i=1}^n (x - \lambda_i)$.

Donc une condition nécessaire pour que f soit diagonalisable est que p_f soit scindé (vérifiée automatiquement si $K = \mathbf{C}$). Voici une condition suffisante:

1.8. Corollaire. Si p_f admet n racines distinctes (donc p_f est scindé à racines simples), f est diagonalisable.

Remarque: Un polynôme "générique" n'a pas de racines multiples, donc un polynôme "générique" dans $\mathbf{C}$ admet n racines distinctes et un endomorphisme "générique" f est diagonalisable sur $\mathbf{C}$.

1.9. Exemple en dimension 2. Soit $A = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$

Alors $p_A(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = x^2 - tr(A)x + det(A)$.

Les valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}((a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc})$.

Soit $\Delta = (a-d)^2 + 4bc$ le discriminant.

1. $K = \mathbf{C}$. Si $\Delta \neq 0$, on a deux valeurs propres distinctes et A est diagonalisable. On peut écrire les vecteurs propres comme $v_k = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_k - a \end{pmatrix}$ ou

$v_k = \begin{pmatrix} \lambda_k - d \\ c \end{pmatrix}$, $k = 1, 2$.

2. $K = \mathbf{R}$. Si $\Delta > 0$, on a deux valeurs propres **réelles** distinctes et A est diagonalisable (sur R).

Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de racines réelles et A n'est diagonalisable sur R. On peut réduire A par similitude à la forme $A' = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ -\beta, \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha = (a+d)/2$ et $\beta = \sqrt{-\Delta}/2$.

Si $\Delta = 0$, on a une racine double et A est diagonalisable si et seulement si A est déja diagonale.

1.10. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire: on a $p_A(x) = (-1)^n \Pi_{i=1}^n (x - a_{ii})$.

Cas particulier: matrice triangulaire avec $a_{11} = ... = a_{nn} = a$. Si A est diagonalisable, alors A est semblable à aI_n et donc $A = aI_n$. Par conséquent, une matrice triangulaire avec les mêmes éléments sur la diagonale et qui n'est pas elle-même diagonale n'est pas diagonalisable.

.

1.11. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des polynômes caractéristiques des blocs diagonaux. Si les blocs diagonaux sont $A_1, ...A_k$, alors $p_A(x) = p_{A_1}(x)...p_{A_k}(x)$.

Exemple. Soit f le projecteur sur F parallèlement à G. Alors , $p_f(x) = (-1)^n x^{n-k}(x-1)^k$, où $k =$dim (F).

.

1.12. Endomorphisme cyclique et matrice "compagnon". Un endomorphisme f est **cyclique** s'il existe un vecteur v tel que $(v, f(v), ..., f^{(n-1)}(v))$ est une base de E. On pose $e_0 = v$, $e_1 = f(x)$,..., $e_{n-1} = f^{(n-1)}(v)$. Dans cette base f agit comme: $f(e_0) = e_1$, $f(e_1) = e_2$,..., $f(e_{n-2}) = e_{n-1}$, et $f(e_{n-1}) = a_0 e_0 + ... + a_{n-1} e_{n-1}$. La matrice de f s'appelle *matrice compagnon.* Alors $p_f(x) = (-1)^n (x^n - a_{n-1}x^{n-1} - ... - a_1 x - a_0)$.

.

1.13. Endomorphismes nilpotents.

Définition. Un endomorphisme est **nilpotent** s'il existe k tel que $f^k = 0$. La valeur minimal de k s'appelle l'**indice de nilpotence** de f.

Proposition. Un endomorphisme est nilpotent si et seulement si il a le même polynôme caractéristique que l'endomorphisme nul: $p_f(x) = (-1)^n x^n$.

Corollaire. Un endomorphisme nilpotent non-nul n'est pas diagonalisable.

.

Espaces propres

1.14. Définition. Soit $\lambda \in K$. Le sous-espace

$E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda Id) = \{v \in E : f(v) = \lambda v\}$ s'appelle **l'espace propre associé à** λ. (Noter que $E_0 = \mathrm{Ker}\ (f)$).

Si λ n'est pas une valeur propre, $E_\lambda = \{0\}$.

On a vu qu'un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si ses vecteurs propres engendrent tout l'espace E. Autrement dit, un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si E est la somme de ses espaces propres.

Le théorème 1.3 peut être reformulé de façon suivante:

1.15. Théorème. Les espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

1.16. Corollaire. Un endomorphisme est **diagonalisable** si et seulement si la somme des dimensions de ses espaces propres est égale à $\dim(E)$. (Rappelons que $\dim(E) < \infty$.)

1.17. Proposition. La dimension de l'espace propre E_λ ne dépasse pas la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique.

1.18. Corollaire. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si p_f est scindé et la dimension de chaque espace propre E_λ est égale à la multiplicité de λ.

.

1.19. Similitude. Définition. Deux endomorphismes $f : E \to E$ et $g : E' \to E'$ sont **semblables** si il existe un isomorphisme $\varphi : E \to E'$ tel que $\varphi f = g\varphi$ (donc $f = \varphi^{-1} g \varphi$).

Si $f(v) = \lambda v$ alors $g(\varphi(v)) = \lambda\varphi(v)$, donc les endomorphismes semblables ont les mêmes valeurs propres et leurs espaces propres sont liés par φ:

$E_\lambda(f) = \varphi(E_\lambda(g))$.

Deux matrices carrées A et B sont **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que $PA = BP$ (donc $A = P^{-1}BP$).

Remarque: Deux endomorphismes sont semblables si et seulement si leurs matrices (dans n'importe quelles bases) sont semblables.