Réduction des endomorphismes 4.

.

7. Sous-espaces caractéristiques.

4.1. Définition. Soit λ une valeur propre de multiplicité m. Le sous-espace $\mathcal{C}_\lambda = Ker((f - \lambda Id))^m$ s'appelle le **sous-espace caractéristique** associé à la valeur propre λ. Noter que $\mathcal{C}_\lambda$ est stable par f et contient l'espace propre associé à λ.

Le lemme des noyaux donne le corollaire:

4.2. Corollaire. Les sous-espaces caractéristiques associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

4.3. Lemme. 1. La dimension de $\mathcal{C}_\lambda$ est égale à la multiplicité m de λ.

2. Soit f_λ l'endomorphisme induit par f dans $\mathcal{C}_\lambda$. Alors

$p_{f_\lambda}(x) = (-1)^m(x - \lambda)^m$.

•• *Démonstration.* On peut écrire $p_f(x) = (x - \lambda)^m q(x)$ où $q(x)$ est premier avec $(x - \lambda)$ (ce qui est équivalent à $q(\lambda) \neq 0$).

Vu que $(f_\lambda - \lambda Id)^m = 0$, on a $p_{f_\lambda}(x) = (-1)^k(x - \lambda)^k$, où k est la dimension de $\mathcal{C}_\lambda$. Par le lemme des noyaux, $E = \mathcal{C}_\lambda \bigoplus E'$, ou $E' = Kerq(f)$ est stable par f. Donc $p_f(x) = p_{f_\lambda}(x)p_{f'}(x)$ où f' est l'endomorphisme induit par f dans E'. Mais λ n'est pas une valeur propre de f' (tous les vecteurs propres associés à λ appartiennent à $\mathcal{C}_\lambda$), donc $p_{f'}(\lambda) \neq 0$. Par conséquent, $p_(f_\lambda)(x) = \pm(x - \lambda)^m$ et $k = m$. ••

.

Remarque. Le fait que $(f_\lambda - \lambda Id)^m = 0$ peut s'exprimer ainsi:

$f_\lambda = \lambda Id + \mathbf{n}_\lambda$, où $\mathbf{n}_\lambda$ est un endomorphisme nilpotent ($\mathbf{n}_\lambda = f_\lambda - \lambda Id$).

.

Le cas du polynôme caractéristique scindé: soit

$p_f(x) = (-1)^n(x - \lambda_1)^{m_1}...(x - \lambda_k)^{m_k}$.

En combinant le théorème de Cayley-Hamilton avec le lemme des noyaux on obtient:

4.4. Corollaire. Si le polynôme caractéristique de f scindé, l'espace E se décompose en somme directe des sous-espaces caractéristiques de f: $E = \bigoplus_i \mathcal{C}_i$, la dimension de $\mathcal{C}_i$ est égale à la multiplicité m_i. Soit f_i l'endomorphisme induit dans $\mathcal{C}_i$. On a $f_i = \lambda_i Id + \mathbf{n}_i$, où $\mathbf{n}_i$ est nilpotent: $\mathbf{n}_i^{m_i} = 0$.

.

Remarque. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si p_f est scindé et chaque sous-espace caractéristique est un espace propre.

.

4.5. Projecteurs spectraux. Soit $E = \bigoplus_i \mathcal{C}_i$. Soit Π_i la projection sur le sous-espace caractéristique $\mathcal{C}_i$ parallèlement à la somme des autres sous-espaces caractéristiques. On appelle Π_i **projecteur spectral**.

.

Si f est diagonalisable, on peut écrire $f = \sum_i \lambda_i \Pi_i$.

.

Pour calculer Π_i on écrit $p_f(x) = (x-\lambda_i)^{m_i} q(x)$ où $q(x)$ est premier avec $(x-\lambda_i)$ (ce qui est équivalent à $q(\lambda_i) \neq 0$). Par la formule de Bézout, on peut trouver des polynômes $r(x)$ et $s(x)$ tels que $(x-\lambda_i)^{m_i} r(x) + q(x)s(x) = 1$.

[On peut s'arranger pour que deg $(s) < m_i$ et deg $(r) <$ deg(q)].

.

4.6. Lemme. $\Pi_i = q(f)s(f)$.

.

Les projecteurs Π_i vérifient:

1. $\Pi_1 + ... + \Pi_k = Id$.
2. $\Pi_i^2 = \Pi_i$.
3. $\Pi_i \Pi_j = 0$ si $i \neq j$.

.

Remarques. 1) Si Π est un projecteur et $\Pi f = f \Pi$, alors Ker(Π) et Im(Π) sont des sous-espaces supplémentaires stables par f.

2) Si $E_\lambda \neq \mathcal{C}_\lambda$, alors E_λ n'admet pas de sous-espace supplémentaire stable par f.

Exemple. Soit dim $E = 3$ et $p_f(x) = -(x-\lambda)(x-\mu)^2$. Alors
$1 = a(x-\mu)^2 + a(2\mu - \lambda - x)(x-\lambda)$, où $a = (\lambda-\mu)^{-2}$. Donc
$\Pi_\lambda = a(f-\mu Id)^2$ et $\Pi_\mu = -a(f - (2\mu-\lambda)Id)(f-\lambda Id)$.

.

Polynôme minimal.

Le polynôme minimal de f_i est $(x-\lambda_i)^{l_i}$ où l_i est l'indice de nilpotence de $f_i - \lambda_i Id$ (évidemment, $l_i \leq m_i$). Par le lemme 3.11 on a $m_f(x) = (x-\lambda_1)^{l_1} ... (x-\lambda_k)^{l_k}$.

4.7. Corollaire. Si $m_f(x) = (x-\lambda_1)^{l_1} ... (x-\lambda_k)^{l_k}$, alors l_i est l'indice de nilpotence de $f_i - \lambda_i Id$ dans le sous-espace caractéristique $\mathcal{C}_i$. En particulier, $\mathcal{C}_i = Ker(f-\lambda_i Id)^{l_i}$.

.

Décomposition de Dunford.

Supposons que le polynôme caractéristique de f est scindé.

Soit f_i l'endomorphisme induit dans $\mathcal{C}_i$. On a $(f_i - \lambda_i Id)^{m_i} = 0$, donc $f_i = \lambda_i Id + \mathbf{n}_i$, où $\mathbf{n}_i^{m_i} = 0$, donc $\mathbf{n}_i$ est nilpotent.

En utilisant cette décomposition, définissons deux endomorphismes, **d** et **n**: si $v \in \mathcal{C}_i$, on pose $\mathbf{d}(v) = \lambda_i v$ et $\mathbf{n}(v) = \mathbf{n}_i(v)$. Donc $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$.

En utilisant les projecteurs spectraux, on écrit $\mathbf{d} = \sum_i \lambda_i \Pi_i$ et $\mathbf{n} = f - \mathbf{d}$. Vu que Π_i est un polynôme en f, on en déduit que $\mathbf{d}$ et $\mathbf{n}$ sont des polynômes en f.

En résumé, $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$ où $\mathbf{d}$ est diagonalisable, $\mathbf{n}$ est nilpotent et $\mathbf{d}$ commute avec $\mathbf{n}$.

4.8. Théorème. (Décomposition de Dunford.) Si le polynôme caractéristique de f est scindé, f se décompose en somme $f = \mathbf{d}+\mathbf{n}$ où $\mathbf{d}$ est diagonalisable, $\mathbf{n}$ est nilpotent et $\mathbf{d}$ commute avec $\mathbf{n}$. Une telle décomposition est unique.

•• *Démonstration de l'unicité.* Soit $f = \mathbf{d}'+\mathbf{n}'$ une deuxième décomposition. On a $\mathbf{d} - \mathbf{d}' = \mathbf{n}' - \mathbf{n}$.

Noter que $\mathbf{d}$ et $\mathbf{d}'$ commutent avec f.

Montrons que $\mathbf{d}$ commute avec $\mathbf{d}'$. Remarquons que $\mathcal{C}_i$ est invariant par $\mathbf{d}'$ et que $\mathbf{d}$ agit dans $\mathcal{C}_i$ par la multiplication par λ_i.

Soit $v \in \mathcal{C}_i$; on a $\mathbf{d}'\mathbf{d}v = \mathbf{d}'(\lambda_i v)$ et $\mathbf{d}\mathbf{d}'v = \lambda_i \mathbf{d}v$. Donc $\mathbf{d}\mathbf{d}' = \mathbf{d}'\mathbf{d}$ dans $\mathcal{C}_i$ et donc dans E.

Par conséquent, $\mathbf{d}$ et $\mathbf{d}'$ sont simultanément diagonalisable et donc $\mathbf{d}-\mathbf{d}'$ est diagonalisable.

Du fait que $\mathbf{d}$ commute avec $\mathbf{d}'$ on déduit que $\mathbf{n}$ commute avec $\mathbf{n}'$ (parce que $\mathbf{n} = f - \mathbf{d}$ et $\mathbf{n}' = f - \mathbf{d}'$). Alors on vérifie immédiatement que $\mathbf{n}' - \mathbf{n}$ est nilpotent.

L'égalité entre $\mathbf{d} - \mathbf{d}'$ diagonalisable et $\mathbf{n}' - \mathbf{n}$ nilpotent implique

$\mathbf{d} - \mathbf{d}' = \mathbf{n}' - \mathbf{n} = 0$. ••

.

Remarque. 1) On a $p_f(x) = p_{\mathbf{d}}(x)$.

2) f est diagonalisable si et seulement si $\mathbf{n} = 0$.

.

Voici quelques résultats supplémentaires (sans démonstration).

.

Blocs de Jordan.

Un bloc de Jordan pour f est un sous-espace stable muni d'une base $e_1, ..., e_k$ telle que $f(e_1) = \lambda e_1$, $f(e_2) = \lambda e_2 + e_1$, . . . , $f(e_k) = \lambda e_k + e_{k-1}$. Noter que le sous-espace en question est contenu dans le sous-espace caractéristique $\mathcal{C}_\lambda$. La matrice de f dans cette base s'appelle aussi bloc de Jordan.

4.9. Théorème. Si p_f est scindé, f admet la décomposition en somme directe des blocs de Jordan.

En particulier, tout endomorphisme peut être réduit à la forme de Jordan dans $\mathbf{C}$.

.

Critère de similitude. La liste des blocs de Jordan dans la décomposition est complètement déterminée par f. Plus précisement, soit j_k le nombre de blocs de Jordan de dimension k dans le sous-espace caractéritisque $\mathcal{C}_\lambda$. Soit $d_k = \dim$ (Ker $(f - \lambda Id)^k$). Alors $j_k = 2d_k - d_{k+1} - d_{k-1}$.

Remarque. La taille maximale des blocs associés à la valeur propre λ est égale à la multiplicité de λ dans le polynôme minimal m_f.

.

4.10. Théorème. Deux matrices sont semblables dans **C** si et seulement si elles ont la même liste des blocs de Jordan.

4.11. Théorème. Si deux matrices réelles sont semblables dans **C**
($A = P^{-1}BP$ avec P complèxe), elles sont semblables dans **R**
($A = Q^{-1}BQ$ avec Q réelle).

4.12. Théorème. Toute matrice est semblable à sa transposée.