Structures fondamentales

I Deuxième semestre

1° Polynômes

Anneaux et corps

- Définition d'un anneau, anneau commutatif unitaire.
- Formule de Newton $(a+b)^n$, factorisation de $a^n - b^n$ lorsque a et b sont deux éléments qui commutent dans un anneau unitaire et n un entier naturel.
- Arithmétique dans $\mathbb{Z}$: division euclidienne, définition et existence du PGCD, relation et théorème de Bézout, lemme de Gauss, factorisation.
- Inversibilité, définition de corps. Inversibles de $\mathbb{Z}$.

Polynômes

Désormais, on fixe un corps $\mathbb{K}$.

- Énoncé sans preuve du théorème permettant la définition de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes. Coefficients de la somme et du produit de deux polynômes.
- Degré, valuation. Le degré du polynôme nul est $-\infty$, sa valuation $+\infty$. Lien avec les opérations : degré de la somme (majoré par le plus grand des degrés), degré du produit (égal à la somme des degrés.
- Évaluation. Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine.

Dérivation

Dans ce paragraphe, on suppose que $\mathbb{K}$ est inclus dans le corps des complexes.

- Définition de la dérivée. Linéarité.
- Formule de Leibniz : dérivée d'un produit, dérivée itérée d'un produit.
- Formule de Taylor pour les polynômes.
- Racines et dérivation : ordre de multiplicité d'une racine a comme exposant maximal avec lequel on peut factoriser $X - a$ ou comme indice de la plus petite dérivée non nulle du polynôme en a.

Arithmétique des polynômes

- Divisibilité : définition. Propriétés : réflexivité, transitivité, pas d'anti-symétrie « mais presque » (à une constante près).
- Division euclidienne : pour tout couple $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, $B \neq 0$, il existe un unique couples (Q, R) (« quotient et reste ») tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.
- PGCD de deux polynômes A et B : définition, notation $A \wedge B$, unicité à une constante multiplicative près, algorithme d'Euclide, existence d'un PGCD, relation de Bézout ($D = A \wedge B \Rightarrow \exists U, V,\ AU + BV = D$), extension à plusieurs polynômes.
- Polynômes premiers entre eux : définition, théorème de Bézout ($A \wedge B = 1 \Leftrightarrow \exists U, V,\ AU + BV = 1$), lemme de Gauss ($A|BC$ et $A \wedge B = 1 \Rightarrow A|C$), conséquence ($A|C$, $B|C$ et $A \wedge B = 1 \Rightarrow AB|C$).
- Polynôme irréductible. Description des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
- Factorisation – essentiellement unique – d'un polynôme comme produit d'irréductibles. Lien avec les racines. Cas de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$.

2° Fractions rationnelles

- Existence d'un corps contenant l'anneau des polynômes, dans lequel tout élément non nul est un quotient de polynômes. Opérations sur les fractions.
- Critère d'égalité pour que $P/Q = \tilde{P}/\tilde{Q}$: $P\tilde{Q} = \tilde{P}Q$. Représentants d'une fraction rationnelle F : tout couple (P, Q) tel que $F = P/Q$.
- Degré d'une fraction rationnelle (indépendant du représentant choisi).
- Représentant irréductible d'une fraction rationnelle F : l'unique couple (P, Q) tel que $F = P/Q$, P et Q premiers entre eux, Q normalisé.
- Définition d'un élément simple : fraction de la forme P/Q^r, avec Q irréductible, $\deg(P) < \deg(Q)$, $r \geq 1$.

3° Espaces vectoriels

Espaces, sous-espaces

- Revoir la définition de corps.
- Définition d'un espace vectoriel.
- Définition de sous-espace, test du sous-espace.
- Définition de combinaison linéaire d'une famille (finie). Sous-espace vectoriel engendré par une famille.

Familles, bases, dimension

- Définition de famille libre (finie), de famille génératrice (finie).
- Relations :
  - si $(u_1, \dots, u_n)$ est libre et $(v_1, \dots, v_p)$ est génératrice, alors $n \leq p$;
  - une famille libre maximale (sens ?) est génératrice ;
  - une famille génératrice minimale (sens ?) est libre.
- Définition de base.
- Théorème de la base incomplète (dans un espace qui admet une famille génératrice finie).
- Deux bases d'un même espace vectoriel ont toujours le même cardinal. Dimension d'un espace vectoriel (qui admet une famille génératrice finie).
- Un sous-espace d'un espace de dimension finie admet une base et sa dimension est inférieure ou égale à celle de l'espace ambiant. De plus, il y a égalité des dimensions SSI le sous-espace est égal à l'espace ambiant.

Opérations sur les sous-espaces

- Somme et intersection de sous-espaces.
- Dimension de la somme.
- Sous-espaces en somme directe : définition pour deux sous-espaces, pour une famille finie.
- Définition de (deux) sous-espaces supplémentaires. Existence de supplémentaires pour un sous-espace donné.

Notions sur les familles infinies [1]

- Définition de famille presque nulle de scalaires. Combinaison linéaire d'une famille infinie.
- Définition de famille libre, famille génératrice (finie ou non).
- Théorème de la base incomplète, théorème de la dimension en toute généralité [2].

---

1. En bordure du programme, ne pas insister sur cette partie en colle.
2. Ces théorèmes sont admis ; la locution *axiome du choix* a été passée sous silence.

4° Applications linéaires

Généralités

- Définition d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Notations $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$.
- Opérations : $\mathcal{L}(E, F)$ est naturellement un espace vectoriel. Linéarité de la composée de deux applications linéaires et bilinéarité de la composition.

Sous-espaces associés à une application linéaire

- Définition du noyau, notation $\operatorname{Ker}\varphi$. Critère d'injectivité [3] : une application linéaire est injective SSI son noyau est réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$.
- Définition de l'image, notation $\operatorname{Im}\varphi$. Définition du rang. Critère de surjectivité (trivial).

Théorème du rang

- Version abstraite [4] : la restriction d'une application linéaire à un supplémentaire du noyau induit un isomorphisme (application linéaire bijective) sur l'image.
- Version numérique, aussi appelée égalité du rang [5] : pour $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, où $\dim E < \infty$, on a : $\dim \operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{rg}\varphi = \dim E$.
- Corollaire [6] : pour $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim E = \dim F < \infty$, on a : φ injective SSI φ surjective SSI φ bijective.
- Aparté : l'image d'une base par une application linéaire est une famille libre (resp. une famille génératrice, une base) SSI l'application linéaire est injective (resp. surjective, bijective).
- Corollaire : une application linéaire bijective préserve la dimension.

Construction d'applications linéaires

- Par l'image d'une base : étant données une base de l'espace de départ et une famille quelconque de l'espace d'arrivée, il existe une unique application linéaire qui envoie la base sur la famille.
- Projecteur associé à un couple de sous-espaces supplémentaires. Propriétés. Caractérisation des idempotents.
- Définition d'une application linéaire par la restriction à un couple de supplémentaires.

5° Matrices

Généralités

- Définition d'une matrice. Exemples : matrice nulle, matrice identité I_n.
- Opérations linéaires (somme, produit par un scalaire). Structure d'espace vectoriel de l'espace des matrices.
- Base des matrices élémentaires, dimension de l'espace des matrices. Dimension de l'espace des applications linéaires.
- Matrice (ou colonne des coordonnées) d'un vecteur dans une base. (Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.)
- Matrice d'une application linéaire dans des bases données (construction par colonne). Isomorphisme entre espace des applications linéaires et espace des matrices.
- Colonne des coordonnées de l'image d'un vecteur, connaissant les coordonnées du vecteur et la matrice de l'application linéaire.
- Application de multiplication d'une matrice par un vecteur : matrice de cette application linéaire dans les bases canoniques.

---

3. Note aux colleurs : très exigible, y compris la preuve !
4. Note aux colleurs : considéré comme difficile ; pas le plus exigible.
5. Note aux colleurs : très exigible !
6. Note aux colleurs : preuve exigible.

- Définition du produit de deux matrices. Lien entre matrice et la composée et produit des matrices.
- Définition d'une matrice inversible. Lien entre bijectivité d'une application linéaire et inversibilité de sa matrice. Détermination de l'inverse en petite dimension par résolution d'un système.

Changement de base
- Matrice de passage entre deux bases ($P = P_{\mathfrak{e},\mathfrak{e}'}$).
- Relation entre colonnes des coordonnées dans deux bases et matrice de passage ($X = PX'$).
- Relation entre matrices d'une même application linéaire exprimées dans deux paires de bases différentes ($A = QA'P^{-1}$). Cas d'un endomorphisme et de bases identiques au départ et à l'arrivée ($A = PA'P^{-1}$).

Théorème du rang et forme normale
- Rang d'une matrice : définition, lien avec le rang de l'espace engendré par ses colonnes et de toute application linéaire qui a cette matrice pour matrice.
- Invariance du rang par multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible.
- Existence de bases dans lesquelles la matrice d'une application linéaire est de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ r \in \mathbb{N}.$$

- Définition de la transposée. Propriétés de la transposition (involutivité, linéarité, transposée d'un produit).
- Invariance du rang par transposition.

II Premier semestre

1° Logique

- Valeur de vérité des assertions « non(P) », « P ou Q », « P et Q » selon celles des assertions P et de Q.
- Règles de calcul pour les connecteurs « et » et « ou » : P et (Q et R) $\Longleftrightarrow$ (P et Q) et R, P et (Q ou R) $\Longleftrightarrow$ (P et Q) ou (P et R), etc.
- Définition de l'implication « $P \Longrightarrow Q$ » : « non(P) ou Q » (et valeur de vérité).
- Contraposée d'une implication ; équivalence d'une implication et de sa contraposée. Réciproque d'une implication.
- Sens des quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
- Négation des assertions « $P \Longrightarrow Q$ », « $\forall x \in X,\ P(x)$ » et « $\exists x \in X,\ P(x)$ ».
  (À savoir faire : négation de phrase plus complexes – presque du cours.)
- Énoncé du principe de récurrence.

  > Soit $H(n)$ une assertion qui dépend de n [et qui a un sens pour tout entier naturel n dans un contexte donné]. On suppose que $H(0)$ est vraie et que, pour tout n, l'implication $H(n) \Rightarrow H(n+1)$ est vraie. Alors, $H(n)$ est vraie pour tout n.

- Théorème de récurrence dite « forte ».

  > Soit $H(n)$ une assertion qui dépend de n [et qui a un sens pour tout entier naturel n dans un contexte donné]. On suppose que $H(0)$ est vraie et que, pour tout n, l'implication $\big(H(0)$ et $H(1)$ et $\cdots$ et $H(n)\big) \Rightarrow H(n+1)$ est vraie. Alors, $H(n)$ est vraie pour tout n.

2° Ensembles, applications

- Sens des notations du type : $E = \big\{1, 2, \{2, 4\}\big\}$; $F = \{x,\ P(x)\}$.
- Définitions : inclusion, partie, ensemble des parties d'un ensemble E (noté $\mathcal{P}(E)$).
- Critère d'égalité de deux ensembles : $E = F \Longleftrightarrow (E \subset F$ et $F \subset E)$.
- Définition des opérations sur les ensembles : union, intersection, différence, complémentaire.
- Couple, produit cartésien. Puissance n^{e} d'un ensemble pour n entier.
- Relations : définition des relations d'ordre et relations d'équivalence.

Applications

- Vocabulaire : fonction et application (ensemble de départ, ensemble d'arrivée, graphe), image d'un élément, notation
$$f:\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$
  Pour la suite, on fixe une application $f : E \to F$.
- Définition de l'image directe d'une partie A de E :
$$f(A) = \{f(x)\ :\ x \in A\} = \{y \in F\ :\ \exists x \in E,\ y = f(x)\}.$$
- Définition de l'image réciproque d'une partie B de F :
$$f^{-1}(B) = \{x \in E\ :\ f(x) \in B\}.$$
- Antécédent d'un élément y de F par f : tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Notation $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$ pour $y \in F$: c'est une partie de F dont les éléments sont les antécédents de y par f.

- Définition d'une application injective : tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au plus un antécédent. En symboles : $\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \ \Rightarrow\ x = x'$ (lien entre les deux ?).
- Définition d'une application surjective : tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au moins un antécédent. En symboles : $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$.
- Définition d'une bijection. Application réciproque d'une bijection : c'est une bijection. Notation f^{-1}. Composée de deux bijections : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- Cardinaux : notion d'équipotence. Équivalence entre l'existence d'une injection de E dans F et d'une surjection de F dans E. Théorème de Cantor-Bernstein.
- Ensembles finis : définition ; principe des tiroirs ; cardinal d'un ensemble fini. Pour une application entre deux ensembles *finis de même cardinal*, il est équivalent d'être injective, surjective et bijective.
- Dénombrabilité : définition ; exemples (pas de preuve exigée) : $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables ; $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ ne le sont pas.
- Dénombrements : cardinal de la réunion de deux ensembles finis, d'un produit cartésien ; nombre d'applications, nombre d'injections, nombre de bijections ; nombre de parties de cardinal fixé.

3° Nombres complexes

- Construction des nombres complexes comme $\mathbb{R}^2$ muni de certaines opérations ; identification du couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et de l'expression $a + ib$ *via* $i = (0, 1)$.
- Partie réelle, partie imaginaire, conjugaison ; conjugué d'une somme, d'un produit.
- Module : définition, propriétés : module du produit, inégalité triangulaire.
- Racines carrées (v. 1) : tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées opposées l'une de l'autre ; on doit savoir les calculer dans les exemples.
- Résolution des équations de degré 2.
- Trigonométrie : dérivée et variations des fonctions cosinus et sinus, définition de π.
- Exponentielle complexe : $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$; relation $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$; formules d'addition $\cos(\theta \pm \theta')$ et $\sin(\theta \pm \theta')$. Formules d'Euler et de Moivre, applications.
- Argument**s** d'un nombre complexe z non nul : tous les réels θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$; ils sont tous égaux *à 2π près* ; argument principal : celui qui est dans $]-\pi, \pi]$. L'argument du produit est la somme des arguments *à 2π près*.
- Écriture géométrique d'un complexe non nul : $z = |z|e^{i\theta}$. Exemple de $1 + e^{i\theta}$.
- Racines n^{es} de l'unité : $\zeta_k = e^{2ik\pi/n}$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Leur somme est nulle.
- Racines n^{es} d'un complexe non nul z : $|z|^{1/n} e^{i\arg(z)/n} \zeta_k$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Cas $n = 2$: racines carrées (v. 2).

4° Géométrie plane

Géométrie affine

- Points et vecteurs de $\mathbb{R}^2$: vecteur $\overrightarrow{AB}$ défini par deux points A et B. Égalité de vecteurs et parallélogramme.
- Opérations sur les vecteurs :
- Déterminant : définition, propriétés formelles, interprétation comme une « aire algébrique ».
- Colinéarité : définition, lien avec le déterminant.
- Bases, repères, changement de base.
- Droites : définition ; équation cartésienne, présentation paramétrique, passage entre les deux.

Géométrie euclidienne

- Définition du produit scalaire. Définition de l'orthogonalité. Théorème de Pythagore. Propriétés formelles du produit scalaire.

– Définition de la norme d'un vecteur, de la distance entre deux points. Lien avec le module des nombres complexes.
– Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire. Cas d'égalité.
– Bases orthonormées : définition, invariance de l'expression du produit scalaire.
– Isométries et similitudes : écriture en coordonnées cartésiennes, écriture en complexes ($z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$).
– Angles de vecteurs et arguments des nombres complexes. Critère de cocyclicité-alignement de quatre points.

5° Géométrie dans l'espace

On se place dans $\mathbb{R}^3$, dont on considère les éléments comme des points ou des vecteurs, selon le cas.

Opérations sur les vecteurs

– Vecteur $\overrightarrow{AB}$ associé à un couple de points (A, B). Opérations linéaires : somme de deux vecteurs, produit d'un réel par un vecteur. Propriétés formelles.
– Produit vectoriel de deux vecteurs, propriétés formelles. Deux vecteurs sont colinéaires SSI leur produit vectoriel est nul.
– Produit scalaire de deux vecteurs, propriétés formelles. Norme et distance. Inégalité de Cauchy-Shwarz, inégalité triangulaire.
– Déterminant et produit mixte : définition, propriétés formelles, lien avec le volume.

Bases et repères

– Bases de l'espace : définition, caratérisation par le produit mixte.
– Bases orthonormées, orthonormalisation de Gram-Schmidt.
– Repère de l'espace : définition, coordonnées d'un point dans un repère, changement de repère.

Droites, plans et sphères

– Définition de la droite passant par un point et dirigée par un vecteur, de la droite passant par deux points distincts, du plan passant par un point et engendré par deux vecteurs, du plan passant par trois points non alignés. Présentation paramétrique d'une droite ou d'un plan ; (système d')équation(s) cartésienne(s) (d'une droite ou) d'un plan.
– Définition d'une sphère, équation cartésienne.