**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre de printemps 2019-2020

Math IV - PMI - Analyse

---

**Quelques questions de compréhension sur le cours du 18 mars :**

COMPACTS – LIMITES ET CONTINUITÉ

---

**Exercice 1.** On rappelle que puisque $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel de dimension finie, les normes sont deux à deux équivalentes sur $\mathbb{R}^2$. Pour répondre aux questions suivantes, on pourra donc utiliser la norme que l'on veut sur $\mathbb{R}^2$. Les ensembles suivants sont-ils des ensembles compacts de $\mathbb{R}^2$ ?

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 3 \text{ et } 0 \leq y \leq 1 + x^2\}$,
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -3 \leq y \leq 2\}$,
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3y = 1\}$.

**Exercice 2.** Soit $E$ un espace vectoriel normé (de dimension quelconque) et $a \in E$.

1. L'ensemble $\{a\}$ est-il un compact de $E$ ?
2. Soit $u$ un vecteur de $E$. L'ensemble $A = \left\{a + \dfrac{1}{n}u \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est-il un compact de $E$ ?

**Exercice 3.** Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que l'application $f : E \longrightarrow E$ définie par

$$\forall x \in E, f(x) = \lfloor \|x\| \rfloor x$$

où $\lfloor \ \rfloor$ désigne la partie entière, est discontinue en tout vecteur $u \in E$ unitaire.

**Exercice 4.** Montrer que l'application $\det : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \det(M) \end{array}$ est continue sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.