Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2019-2020

Math IV - PMI - Analyse

Quelques questions de compréhension sur le cours du 1er avril :

FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

Exercice 1. Justifier que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = \big(\sin(x) + x^2, \arctan(x)\big)$ est différentiable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa différentielle en tout point $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + xy$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et expliciter sa différentielle en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel de dimension finie non nulle. Toute application linéaire au départ de E étant continue, les endomorphismes de E sont des applications continues sur E, on peut donc définir leur norme subordonnée à la norme $\|\ \|$, que l'on notera $|\!|\!|\ |\!|\!|$. Muni de cette norme subordonnée, l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq |\!|\!|u|\!|\!| \|x\|$.
2. Montrer que pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $|\!|\!|u \circ v|\!|\!| \leq |\!|\!|u|\!|\!| |\!|\!|v|\!|\!|$.
3. En déduire que, pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $u^2 = o(|\!|\!|u|\!|\!|)$ lorsque $u \to 0_{\mathcal{L}(E)}$.
4. Montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto & u^2 \end{array}$ est différentiable sur $\mathcal{L}(E)$ et déterminer sa différentielle en tout $u \in \mathcal{L}(E)$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$. À l'aide du théorème de différentiation d'une composée, justifier l'existence et déterminer la différentielle de l'application $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = f(y, x)$ en fonction de celle de f.