
Quelques questions de compréhension sur le cours du 25 mars :CONTINUITÉ ET TOPOLOGIE – CONTINUITÉ ET LINÉARITÉ

Exercice 1. L'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 1) < 0\}$ est-il ouvert ? fermé ?

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 3\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3. On note E l'espace vectoriel des suites réelles bornées que l'on munit de la norme N_∞ :

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \quad N_\infty(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|.$$

On considère deux endomorphismes T et Δ de E définis par :

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad T(u) = (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \Delta(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Montrer que T et Δ sont des applications continues de E et préciser leurs normes subordonnées, notées $\|T\|$ et $\|\Delta\|$.