Quelques questions de compréhension sur le cours du 8 avril :

JACOBIENNES ET DÉRIVÉES PARTIELLES

Exercice 1. Pour les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, justifier l'existence puis calculer les dérivées partielles en tout point où cela est possible, et écrire leurs matrices jacobiennes en ces points (dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ respectivement). Lorsque la fonction est différentiable en (x, y), exprimer sa différentielle en (x, y) et expliciter le développement limité à l'ordre 1 en ce point :

1. $f : (x, y) \longmapsto x \sin(x + y)$,
2. $g : (x, y) \longmapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ (on remarquera que $g = \| \ \|_2$, même si cela n'est pas forcément utile).

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

1. Justifier que f est continue en $(0, 0)$.
2. Étudier l'existence des dérivées partielles de f en $(0, 0)$, et les calculer lorsqu'elles existent.
3. La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$? Si oui, expliciter $\mathrm{d}f(0, 0)$.

Exercice 3. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications différentiables. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & f(x + g(x, y)) \end{array}$$

est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer sa différentielle en tout point en fonction des dérivées partielles de f et g.