Université Claude Bernard - Lyon 1 — Printemps 2014

Math II - PMI/CCP — Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir numéro 5

Pas de calculettes

Les exercices sont indépendants

Exercice 1

On note (E) l'équation différentielle suivante, de fonction inconnue $y\colon x \mapsto y(x)$, à valeurs réelles et deux fois dérivable :

$$(E) \qquad y'' - 2y' + 5y = 5xe^{2x}.$$

1) Résoudre (E) sur $\mathbf{R}$.

2) a) Soit y une solution de (E). Montrer que $y(x)$ a une limite (finie ou infinie) quand x tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

b) L'équation (E) admet-elle des solutions périodiques ?

Exercice 2

On considère la fonction u définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$u(t) = \frac{t^2}{t^2 + \sin^2 t} \quad \text{pour } t \neq 0 \qquad \text{et } u(0) = \frac{1}{2}.$$

1) Montrer que la fonction u est continue sur $\mathbf{R}$.

2) Pour tout x réel, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} u(t)\,dt$.

a) Montrer que F est une fonction impaire.

b) Montrer que F est une fonction dérivable, et exprimer sa dérivée.

c) Dans cette question, on suppose $x > 0$. Montrer l'encadrement :

$$\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+1}\,dt \leq F(x) \leq x.$$

En déduire que $F(x) - x$ admet une limite, que l'on explicitera, quand x tend vers $+\infty$. Quelle est l'allure de la branche infinie du graphe de F qui correspond à x tendant vers $+\infty$?

Exercice 3

On définit une application f de $\mathbf{R}^3$ vers $\mathbf{R}^3$ par : pour tous x, y, z réels :

$$f(x, y, z) = (3x - y + z, 4x - y + 2z, -2x + y).$$

On notera (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ et écrire sa matrice dans la base canonique.

2) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et une base de $\operatorname{Ker} f$.

3) Montrer que $\mathbf{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

4) On note F l'ensemble $F = \{v \in \mathbf{R}^3 \mid f(v) = v\}$.

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

b) Montrer que $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont des éléments de F, puis que $F = \operatorname{Im} f$.

5) On note $a = (1, 2, -1)$. Justifier que $(a, f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\mathbf{R}^3$ et écrire la matrice de f dans cette nouvelle base.

Exercice 4

Soit $\mathbf{K}$ un corps, E un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$ et u un endomorphisme de E qui vérifie $u^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ où $0_{\mathcal{L}(E)}$ désigne l'endomorphisme nul.

1) Montrer que $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Ker} u$.

2) En déduire que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} u^2 \leq n$.

3) a) Montrer que $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$ et en déduire que $\operatorname{rg} u^2 \leq \operatorname{rg} u$.

b) Dans cette question on suppose $u \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $\operatorname{rg} u^2 < \operatorname{rg} u$.

4) Dans cette question, on suppose que $n = 3$ et que $u^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} u^2 = 3$.