Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2017-2018

Analyse IV Durée : 2 heures

Examen final du vendredi 25 mai 2018

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Les quatres exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $u_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{n^\alpha x e^{-nx}}{n^2+1}.$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, étudier la limite de $u_n(x)$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Montrer que le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ est $\mathbb{R}^+$.

   On note $S : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ sa fonction somme.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations de la fonction $x \longmapsto xe^{-nx}$ sur $\mathbb{R}^+$.

   (b) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ pour tout $a > 0$.

   (c) Montrer que S est continue sur $]0; +\infty[$.

   (d) Montrer que S admet une limite lorsque $x \to +\infty$ et la déterminer.
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2. Les questions 1 et 2 sont totalement indépendantes.

1. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

   (a) $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{(-1)^n n} z^n$,

   (b) $\sum_{n} a_n z^{3n}$,

   (c) $\sum_{n} a_n^2\, z^n$,
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

   (a) Déterminer le rayon de convergence noté R de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n} z^n$.

   (b) Montrer que la fonction

   $$\begin{array}{rccc} g & : &]-R;R[& \to & \mathbb{C} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} x^n \end{array}$$

   est dérivable sur $]-R, R[$ et que

   $$g'(x) = \frac{e^{i\theta} - x}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1} \quad \forall x \in]-R; R[.$$

   (c) En déduire une expression exacte de $g(x)$ pour $x \in]-R; R[$.

Exercice 3. On considère un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Soit A un fermé non vide de E, on pose pour tout $x \in E$

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| \ ; \ a \in A\}\,.$$

1. (a) Soit $x \in E$. On rappelle que par caractérisation de la borne inférieure, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $d(x, A) = \lim_{n\to+\infty} \|x - a_n\|$. On suppose que $d(x, A) = 0$. Montrez que $x \in A$.

   (b) Montrez que $d(x, A) > 0$ si et seulement si $x \notin A$.

   (c) Montrez que cette dernière propriété n'est pas vraie si A n'est pas fermé, en donnant un contre-exemple.

2. Montrez que

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\| \ .$$

   En déduire que $x \mapsto d(x, A)$ est une application continue de E dans $\mathbb{R}$.

3. Montrez que pour A, B fermés (non vides) dans E on a $A \cap B = \emptyset$ si et seulement si $d(x, A) + d(x, B) > 0$ pour tout $x \in E$.

4. On suppose A, B fermés non vides et disjoints dans E.

   (a) Montrez que pour tous $x, y \in E$,

$$f \ : \ x \mapsto \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

   est définie sur E, continue sur E, qu'elle vaut 0 sur A et 1 sur B.

   (b) On pose $U = \left\{x \in E\,;\, -\frac{1}{2} < f(x) < \frac{1}{2}\right\}$ et $V = \left\{x \in E\,;\, \frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2}\right\}$. Montrer que U et V sont deux ouverts dans E tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 4. Les questions 1 et 2 sont totalement indépendantes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Pour $P \in E$, on pose

$$\|P\| = \sup_{t\in[0;1]} |P(t)|\,.$$

   (a) Montrer que $\| \ \|$ est une norme sur E.

   (b) Soit $H \in E$, montrer que $\|H^2\| \leq \|H\|^2$ et en déduire que $H^2 = o(\|H\|)$ lorsque $H \to 0_E$.

   (c) On considère l'application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}_{2n}[X]$ définie par

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P' + P^2.$$

   Montrer que f est différentiable sur E et déterminer sa différentielle en tout polynôme $P \in E$.

2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x, y) = g(x\cos(y), y\sin(x)).$$

   Justifier la différentiabilité de φ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer la différentielle de φ en tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ à l'aide des éléments intervenant dans la matrice jacobienne de g (en un point bien choisi).

Correction de l'examen final du 25 mai 2018

Correction de l'exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - Si $x > 0$, alors $nx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et par croissances comparées, $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} xn^{\alpha-2}e^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   - Si $x = 0$, alors $u_n(x) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   - Si $x < 0$, alors $nx \to +\infty$ et toujours par croissances comparées, $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} xn^{\alpha-2}e^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
2. Soit $x \in]-\infty; 0[$, comme $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$, la série numérique $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x = 0$, on a vu que $u_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc la série $\sum u_n(x)$ converge (la suite de ses sommes partielles est constante égale à 0 donc convergente). Soit $x \in]0; +\infty[$, alors
$$n^2 u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} xn^{\alpha}e^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{d'où} \quad u_n(x) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (car $2 > 1$), donc par comparaison de séries à termes positifs, il en est de même de la série $\sum u_n(x)$. Ainsi, le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$ est $\mathbb{R}^+$.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto xe^{-nx}$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \geq 0$, $f_n'(x) = (1 - nx)e^{-nx}$ qui est positif si $x \in [0; 1/n]$ et négatif si $x \in [1/n; +\infty[$. La fonction f_n est donc (strictement) croissante sur $[0; 1/n]$ et (strictement) décroissante sur $[1/n; +\infty[$ (avec $f_n(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$).

   (b) Soit $a > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $u_n = \frac{n^\alpha}{n^2+1} f_n$ (avec $\frac{n^\alpha}{n^2+1} > 0$), son tableau de variations est le même que celui de f_n. De plus, la fonction u_n est à valeurs positives et par le tableau de variations, elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et en particulier sur $[a; +\infty[$. Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par définition de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{1}{n} \leq a$. Par conséquent, pour tout $n \geq n_0$, u_n est (strictement décroissante) sur $[a; +\infty[$ ce qui entraîne
$$\|u_n\|_{\infty;[a;+\infty[} = \sup_{x\in[a;+\infty[} |u_n(x)| = \sup_{x\in[a;+\infty[} u_n(x) = u_n(a).$$
   Par la question 2, la série $\sum u_n(a) = \sum \|u_n\|_{\infty;[a;+\infty[}$ converge, ce qui prouve la convergence normale de $\sum u_n$ sur $[a; +\infty[$.

   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}^+$. On vient de voir que $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a; +\infty[$, ceci pour tout $a > 0$, donc elle converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0; +\infty[$. Par le théorème de continuité, S est donc continue sur $]0; +\infty[$.

   (d)
   - L'ensemble $[1; +\infty[$ n'est pas majoré.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissances comparées car $n \geq 1$).
   - La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[1; +\infty[$.

   D'après le théorème de la double limite, la fonction somme S admet aussi une limite (finie) quand $x \to +\infty$ et
$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

4. On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est bornée sur $\mathbb{R}^+$, positive, et d'après son tableau de variations

$$\|u_n\|_{\infty;\mathbb{R}^+} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |u_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} u_n(x) = u_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^{\alpha-1}e^{-1}}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{n^{3-\alpha}}$$

Par comparaison de séries à termes positifs (et puisque $e^{-1} > 0$), $\sum \|u_n\|_{\infty;\mathbb{R}^+}$ converge si et seulement si $\sum \frac{1}{n^{3-\alpha}}$ converge, ce qui équivaut d'après Riemann à $3-\alpha > 1$, encore équivalent à $\alpha < 2$. Ainsi, $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\alpha < 2$.

Correction de l'exercice 2

1. (a) Notons R_a le rayon de convergence de cette série entière. La règle de Cauchy ne permet pas de conclure ici puisque $\left|e^{(-1)^n n}\right|^{1/n} = e^{(-1)^n}$ n'admet pas de limite lorsque $n \to +\infty$. On peut donc par exemple revenir à la définition : $R_a = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \mid (e^{(-1)^n n} r^n)_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}$. Soit $r > 0$, on sait que la suite $(e^{(-1)^n n} r^n)_n$ converge vers 0 si et seulement si ses sous-suites composées respectivement des termes pairs et impairs convergent toutes les deux vers 0. Or

$$e^{(-1)^{2p}2p} r^{2p} = (er)^{2p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty \text{ si } er > 1 \iff r > e^{-1} \\ 1 \text{ si } r = e^{-1} \\ 0 \text{ si } r < e^{-1}. \end{cases}$$

De même

$$e^{(-1)^{2p+1}(2p+1)} r^{2p+1} = (e^{-1}r)^{2p+1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff e^{-1}r < 1 \iff r < e.$$

Ainsi, $(e^{(-1)^n n} r^n)_n$ converge vers 0 si et seulement si $r < \min(e^{-1}, e) = e^{-1}$ ce qui démontre que $R_a = e^{-1}$.

(b) Notons R_b le rayon de convergence de $\sum a_n z^{3n}$. Il s'agit d'une série lacunaire. Puisque l'on ne connait aucun autre renseignement sur les a_n à part le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$, on essaie d'utiliser les caractérisations de R. Soit $z \in \mathbb{C}$, posons $w = z^3$. Si $|w| < R$, alors la série numérique $\sum a_n w^n = \sum a_n z^{3n}$ converge absolument, donc $|z| \le R_b$. Or $\left|z^3\right| < R \iff |z|^3 < R \iff |z| < R^{1/3}$ (par stricte croissance de $t \longmapsto t^3$ et $t \longmapsto t^{1/3}$ sur $\mathbb{R}^+$). On en déduit que $R^{1/3} \le R_b$. De même si $|w| > R$, ce qui équivaut à $|z| > R^{1/3}$, alors la série numérique $\sum a_n w^n = \sum a_n z^{3n}$ diverge grossièrement, d'où $|z| \ge R_b$. Ceci étant valable pour tout z tel que $|z| > R^{1/3}$, on en déduit que $R^{1/3} \ge R_b$ d'où l'égalité $R_b = R^{1/3}$.

(c) Notons R_c le rayon de convergence de $\sum a_n^2 z^n$. Soit $r \ge 0$, pour $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $a_n^2 r^n = (a_n \sqrt{r}^n)^2$ d'où

$$\begin{aligned} R_c &= \sup\{r \ge 0 \mid (a_n\sqrt{r}^n)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\} \\ &= \sup\{r \ge 0 \mid a_n\sqrt{r}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\} \\ &= \sup\{s^2 \mid s \ge 0, a_n s^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\} \text{ par bijectivité de } t \longmapsto \sqrt{t} \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ &= R^2. \end{aligned}$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{e^{in\theta}}{n}$. Comme $a_n \neq 0$, on peut chercher à utiliser la règle de d'Alembert :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\left|e^{i(n+1)\theta}\right|}{n+1} \frac{n}{e^{in\theta}} = \frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

donc le rayon recherché est $R = \frac{1}{1} = 1$.

(b) La fonction g est la fonction somme de la série entière $\sum a_n x^n$. Comme $R > 0$, par le cours sur les séries entières, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R;R[$ et ses dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme. Par conséquent, g est dérivable sur $]-R;R[$ et pour tout $x \in]-R;R[$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} e^{in\theta} x^{n-1} \\
&= e^{i\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{i\theta} x)^n \\
&= e^{i\theta} \frac{1}{1-e^{i\theta}x} \text{ par sommation géométrique car } \left|e^{i\theta}x\right| = |x| < 1 \\
&= \frac{e^{i\theta}(1-e^{-i\theta}x)}{(1-e^{i\theta}x)(1-e^{-i\theta}x)} \\
&= \frac{e^{i\theta}-x}{1-2\cos(\theta)x+x^2}.
\end{aligned}$$

(c) Puisque g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R;R[$, on peut écrire pour $\theta \neq 0[\pi]$

$$\begin{aligned}
g(x) &= g(0) + \int_0^x \frac{e^{i\theta}-t}{1-2\cos(\theta)t+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \left(\frac{i\sin(\theta)}{1-2\cos(\theta)t+t^2} - \frac{1}{2}\frac{2t-2\cos(\theta)}{1-2\cos(\theta)t+t^2} \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{i\sin(\theta)}{(t-\cos(\theta))^2-\cos^2(\theta)+1} - \frac{1}{2}\left[\ln\left|1-2\cos(\theta)+t^2\right|\right]_0^x \\
&= \frac{i}{\sin(\theta)} \int_0^x \frac{1}{1+((t-\cos\theta)/\sin(\theta))^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\ln(1-2\cos(\theta)+t^2) \\
&= i \int_{-\operatorname{cotan}(\theta)}^{(x-\cos(\theta))/\sin(\theta)} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\ln(1-2\cos(\theta)+t^2) \\
&= i\left[\arctan(u)\right]_{-\operatorname{cotan}(\theta)}^{(x-\cos(\theta))/\sin(\theta)} - \frac{1}{2}\ln(1-2\cos(\theta)+t^2) \\
&= i\arctan\left(\frac{x-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + \arctan(\operatorname{cotan}\theta) - \frac{1}{2}\ln(1-2\cos(\theta)+t^2).
\end{aligned}$$

Pour $\theta = 0[\pi]$, $\sin(\theta) = 0$ d'où par le calcul ci-dessus :

$$g(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-2\cos(\theta)+t^2) = -\frac{1}{2}\ln((1\pm t)^2) = -\ln(1\pm t).$$

Correction de l'exercice 3

1. (a) On a $0 = d(xA) = \lim_{n\to+\infty} \|x-a_n\|$ ce qui démontre que la suite $(a_n)_n$ converge vers x dans E. Or, pour tout n, $a_n \in A$ et A est fermé, donc $x \in A$.

   (b) Puisque la distance d'un point à un élément est toujours positive, montrer que $d(x,A) > 0 \iff x \notin A$ équivaut à démontrer que $d(x,A) = 0 \iff x \in A$. La question précédente donne le sens direct. Supposons que $x \in A$, alors on a $0 \leq d(x,A) \leq \|x-x\| = 0$ donc $d(x,A) = 0$, ce qui termine la démonstration de l'équivalence.

   (c) Prenons par exemple $E = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, $A =]0;+\infty[$ (qui n'est pas un fermé car la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de A convergeant vers $0 \notin A$) et $x = 0$. Alors on a $d(0,A) = \inf\{|a| \mid a \in]0;+\infty[\} = 0$ alors que $0 \notin A$.

2. Soient $x, y \in E$. Pour tout $a \in A$, on a

$$d(x,A) \leq \|x-a\| = \|x-y+y-a| \leq \|x-y\| + \|y-a\|$$

d'où

$$d(x,A) - \|x-y\| \leq \|y-a\|.$$

On vient de trouver un minorant de l'ensemble $\{\|y-a\| \mid a \in A\}$, or la borne inférieure d'un ensemble est le plus grand des minorants, d'où $d(y,A) \leq d(x,A) - \|x-y\|$ ce qui entraîne $d(x,A) - d(y,A) \leq \|y-x\|$. En échangeant les rôles de x et y, on obtient de même que $d(y,A) - d(x,A) = -(d(x,A) - d(y,A)) \leq \|x-y\| = \|y-x\|$ d'où le résultat voulu

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq \|x-y\|.$$

Ceci démontre que la fonction $x \longmapsto d(x,A)$ est 1-lipschitzienne donc continue de E dans $\mathbb{R}$.

3. Puisque pour tout $x \in E$, $d(x,A) + d(x,B) \geq 0$, on peut encore une fois passer par négation de cette équivalence, en utilisant l'équivalence prouvée à la question **??** :

$$\begin{aligned} A \cap B \neq \emptyset \quad &\iff \quad \exists x \in E, \mid x \in\in A \text{ et } x \in B \\ \\ &\iff \quad \exists x \in E, \mid d(x,A) = 0 \text{ et } d(x,B) = 0 \\ &\iff \quad \exists x \in E, \mid d(x,A) + d(x,B) = 0 \end{aligned}$$

où le sens $\Leftarrow$ de la dernière équivalence provient de la positivité des deux termes $d(x,A)$ et $d(x,B)$.

4. (a) Puisque A et B sont disjoints, on a $A \cap B = \emptyset$ et d'après la question précédente, $d(x,A) + d(x,B) > 0$ pour tout $x \in E$, ce qui prouve que f est bien définie sur E (comme quotient de fonctions définies dont le dénominateur ne s'annule pas). De plus, on a vu que pour un fermé X non vide, $x \longmapsto d(x,X)$ est continue sur R. Ainsi, f est continue comme quotient et somme de fonctions continues sur E. Enfin, pour tout $x \in A$, on a $d(x,A) = 0$ donc

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)} = 0$$

et pour tout $x \in B$, $d(x,B) = 0$ donc

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)} = \frac{d(x,A)}{d(x,A)} = 1.$$

(b) On remarque que $U = f^{-1}(]-1/2;1/2[)$ et $V = f^{-1}(]1/2;3/2[)$. Ainsi, U et V sont des ouverts de E comme images réciproques par la fonction continue f d'ouverts de $\mathbb{R}$ (intervalles ouverts). De plus par la question précédente, $A \subset U$ et $B \subset V$ et il est clair que U et V ne peuvent pas posséder d'éléments en commun (pour $x \in E$, il est impossible d'avoir simultanément $f(x) < 1/2$ et $1/2 < f(x)$).

Correction de l'exercice 4

1. (a)
   - Tout d'abord, $\| \; \|$ est bien définie car si $P \in E$, l'application $t \longmapsto P(t)$ est continue sur le segment $[0;1]$ donc est bornée sur ce segment.
   - Soit $P \in E$, $\|P\| = 0 \iff \forall t \in [0;1], P(t) = 0 \iff P = 0_E$ puisque seul le polynôme nul a une infinité de racines.
   - Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in E$, alors $\|\lambda P\| = \sup\limits_{t \in [0;1]} |\lambda| \, |P(t)| = |\lambda| \, \|P\|$.

- Soient $P, Q \in E$, alors pour tout $t \in [0;1]$, par inégalité triangulaire,

$$|P(t)+Q(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq \|P\| + \|Q\|$$

La borne supérieure étant le plus petit majorant de l'ensemble, on en déduit que $\|P+Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$, ce qui termine de montrer que $\| \ \|$ est une norme.

(b) Soit $H \in E$. Pour tout $t \in [0;1]$, $\left|H^2(t)\right| = \left|H(t)^2\right| = |H(t)|^2 \leq \|H\|^2$ puisque $0 \leq |H(t)| \leq \|H\|$. Par passage à la borne supérieure comme ci-dessus, il vient bien $\|H^2\| \leq \|H\|^2$. Par suite, pour $H \neq 0_E$, on a

$$0 \leq \left\| \frac{H^2}{\|H\|} \right\| = \frac{\|H^2\|}{\|H\|} \leq \frac{\|H\|^2}{\|H\|} = \|H\| \underset{H \to 0_E}{\longrightarrow} 0$$

ce qui démontre que $H^2 = o(\|H\|)$ quand $H \to 0_E$.

(c) Soit $P \in E$. Pour tout $H \in E$, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(P+H) &= (P+H)' + (P+H)^2 \\ &= P' + H' + P^2 + 2PH + H^2 \\ &= f(P) + u(H) + H^2 \end{aligned}$$

où $u : H \in E \longmapsto H' + 2PH$ est une application linéaire de E dans lui-même (puisque $\forall H, K \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $u(\lambda H + K) = \lambda u(H) + u(K)$) et $H^2 = o(\|H\|)$ lorsque $H \to 0_E$. Ceci démontre que f est différentiable en P et que $\mathrm{d}f(P) = u$.

2. Notons $\psi : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x\cos(y), y\sin(x))$ et ψ_1, ψ_2 ses fonctiones coordonnées. ψ_1 est le produit de la fonction projection $(x,y) \longmapsto x$ avec la composée de la fonction projection $(x,y) \longmapsto y$ avec la fonction $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ quit sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$. Par opération, ψ_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On montre de même que ψ_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ce qui entraîne que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Puisque $\varphi = g \circ \psi$, φ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ par composition de fonctions différentiables. Par la version matricielle du théorème de différentiation d'une composée, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} J_\varphi(x,y) &= J_g(\psi(x,y)) \times J_\psi(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 g(x\cos(y), y\sin(x)) & \partial_2 g(x\cos(y), y\sin(x)) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 g(x\cos(y), y\sin(x)) & \partial_2 g(x\cos(y), y\sin(x)) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(y) & -x\sin(y) \\ y\cos(x) & \sin(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 g(x',y')\cos(y) + \partial_2 g(x',y') y\cos(x) & -x\sin(y)\partial_1 g(x',y') + \sin(x)\partial_2 g(x',y') \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où l'on a noté $(x',y') = (x\cos(y), y\sin(x))$. Ainsi, la différentielle de g en (x,y) est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{d}g(x,y)(h,k) = {} & h\left(\partial_1 g(x\cos(y), y\sin(x))\cos(y) + \partial_2 g(x\cos(y), y\sin(x)) y\cos(x)\right) \\ & + k\left(-x\sin(y)\partial_1 g(x\cos(y), y\sin(x)) + \sin(x)\partial_2 g(x\cos(y), y\sin(x))\right) \end{aligned}$$