Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2020-2021

Analyse III — Durée : 1 heure 30 minutes

Examen final du mardi 29 juin 2021

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Questions de cours :

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y)$. Donner la définition de "f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable x en $(0, 0)$".
2. Soit $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Donner la définition de la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 1.

1. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ où :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{2^n}{(1+2)(1+2^2)\cdots(1+2^n)} = \frac{2^n}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+2^k)}.$$
2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n+|\cos(n)|}\right)$.

Exercice 2. Soit $m \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^m y}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Justifier brièvement que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.
2. (a) Pour $m = 0$ puis $m = 1$, montrer que f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.
   (b) Montrer que, pour $m > 1$, la fonction f admet une limite finie en $(0, 0)$ et la déterminer.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m pour que f soit continue en $(0, 0)$.
4. Dans la suite de l'exercice, on supposera $m \geq 1$. Montrer que f admet des dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$ et les calculer.
5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m pour que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)e^{-t}}{1+t^x}\,\mathrm{d}t$.

1. Pour $k \in \{1; 2\}$, on note $g_k : t \longmapsto (\ln t)^k e^{-t}$. Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g_k(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Pour $k \in \{1; 2\}$, pour $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\dfrac{t^x}{(1+t^x)^k} \leq 1$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour $x \in \mathbb{R}$, $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale.
4. En déduire le sens de variation de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit α un réel strictement positif. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx^2/2}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. (a) Étudier les variations de la fonction $x \longmapsto xe^{-nx^2/2}$.

   (b) À quelle condition sur α la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^+$?
3. À quelle condition sur α la suite d'intégrales $(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x)_{n\geq 0}$ est-elle convergente ? La convergence uniforme de $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{R}^+$ garantit-elle la convergence de la suite $(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x)_{n\geq 0}$?
4. Montrer que la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ est uniforme sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Considérons la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x, f(x,x))$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.