

Feuille d'exercices numéro 3

Angles obtus - Gram - Espaces euclidiens de polynômes - Applications des projections orthogonales

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on se place dans E , espace euclidien de dimension finie n .

On dira qu'une famille (v_0, v_1, \dots, v_p) de vecteurs de E est **obtusangle** lorsque pour tous $i \neq j$ dans $\{0, \dots, p\}$:

$$\langle v_i | v_j \rangle < 0.$$

1) Dessiner une famille obtusangle formée de trois vecteurs d'un même plan.

2) Soit (v_0, v_1, \dots, v_p) une famille obtusangle de vecteurs de E . Montrer que pour tous réels $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$:

$$\left\| \sum_{i=0}^p \alpha_i v_i \right\|^2 \leq \sum_{i=0}^p \alpha_i^2 \|v_i\|^2.$$

3) L'objectif de la question est de montrer que pour tous vecteurs v_0, v_1, \dots, v_p de E :

$$(v_0, v_1, \dots, v_p) \text{ est obtusangle} \quad \Rightarrow \quad (v_1, \dots, v_p) \text{ est libre.}$$

Pour montrer cet énoncé, on prend $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels tels que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0$.

On note $A = \{i \mid \lambda_i > 0\}$, $B = \{j \mid \lambda_j \leq 0\}$ et $u = \sum_{i \in A} \lambda_i v_i$.

a) Montrer que $u = - \sum_{j \in B} \lambda_j v_j$.

b) En écrivant que :

$$\|u\|^2 = - \left\langle \sum_{i \in A} \lambda_i v_i \mid \sum_{j \in B} \lambda_j v_j \right\rangle,$$

montrer que $u = 0$.

c) En calculant $\langle v_0 | u \rangle$, montrer que $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ et conclure.

4) Soit (v_0, v_1, \dots, v_n) une famille obtusangle formée de $n + 1$ vecteurs de E (on rappelle que n désigne la dimension de l'espace E).

a) En utilisant le 3), montrer que (v_1, \dots, v_n) est une base de E .

b) On note μ_1, \dots, μ_n les coordonnées de v_0 dans la base (v_1, \dots, v_n) .

En appliquant le 2) à $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = \mu_1, \dots, \alpha_n = \mu_n$, montrer que pour tout i entre 1 et n le réel μ_i est négatif ou nul.

Exercice 2

(Cet exercice prolonge et complète le 5 de la fiche 1).

On travaille dans E espace euclidien. Pour (v_1, \dots, v_k) famille dans E , le déterminant de Gram est par définition le déterminant de la matrice :

$$G(v_1, \dots, v_k) = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_k, v_1 \rangle & \dots & \langle v_k, v_k \rangle \end{pmatrix}$$

On rappelle avoir montré il y a quelques semaines que si la famille est liée, alors son Gram est nul.

1) On suppose (v_1, \dots, v_k) libre. Montrer que son Gram est strictement positif.

Dans la suite, on supposera que (v_1, \dots, v_k) est libre, et on notera F le sous-espace vectoriel de E qu'ils engendrent, et p_F la projection orthogonale sur F .

2) Soit x un vecteur de E , et A la matrice-colonne $(k, 1)$ des coordonnées de $p_F(x)$ dans F . Montrer que :

$$G(v_1, \dots, v_k) \times A = \begin{pmatrix} \langle x, v_1 \rangle \\ \langle x, v_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, v_k \rangle \end{pmatrix}.$$

3) En déduire que pour tout x de E :

$$d^2(x, F) = \frac{\det G(v_1, \dots, v_k, x)}{\det G(v_1, \dots, v_k)}.$$

4) Soit (u_1, \dots, u_l) une famille de vecteurs de E . Montrer que :

$$\det G(u_1, \dots, u_l) \leq \|u_1\|^2 \cdot \|u_2\|^2 \cdots \|u_l\|^2.$$

(On fera une récurrence sur $l \geq 1$ et on utilisera la question précédente).

Exercice 3

1) Soit E un espace vectoriel de dimension n , $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E et $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E . Montrer que :

$$\det_{\underline{e}}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\underline{e}}(f_1, \dots, f_n) \cdot \det_{\underline{f}}(u_1, \dots, u_n).$$

2) Dans cette question et toutes celles qui suivent, on suppose que E est un espace vectoriel euclidien de dimension n . Soit $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases orthonormées de E . En remarquant que la matrice de passage de l'une à l'autre est une matrice orthogonale, montrer que :

$$\det_{\underline{e}}(f_1, \dots, f_n) = \pm 1.$$

3) Soit $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E et $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée. Montrer :

$$\text{Vol}(u_1, \dots, u_n) = |\det_{\underline{e}}(u_1, \dots, u_n)|$$

(le "volume" du parallélépipède construit sur \underline{u}) est indépendant de la base orthonormée \underline{e} utilisée.

4) Soit (u_1, \dots, u_n) une famille de n vecteurs d'un espace euclidien de dimension n . Montrer que :

$$\det G(u_1, \dots, u_n) = \text{Vol}^2(u_1, \dots, u_n).$$

Exercice 4

Dans cet exercice, on note \mathcal{C} l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ vers \mathbf{R} .

Pour u et v dans \mathcal{C} , on pose :

$$\langle u | v \rangle = \int_{-1}^1 u(t)v(t)\sqrt{1-t^2} dt.$$

1) Montrer que $\langle | \rangle$ est un produit scalaire (défini positif) sur \mathcal{C} .

2) a) Montrer que pour tout $m \geq 0$ et tout φ réel :

$$\sin[(m+2)\varphi] = 2 \cos \varphi \sin[(m+1)\varphi] - \sin(m\varphi).$$

b) Expliciter un polynôme constant U_0 et un polynôme U_1 de degré 1 tels que pour tout $\varphi \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$:

$$U_0(\cos \varphi) = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi} \quad \text{et} \quad U_1(\cos \varphi) = \frac{\sin(2\varphi)}{\sin \varphi}.$$

c) Montrer, en effectuant une récurrence forte sur $n \geq 0$ que pour tout $n \geq 0$, il existe un polynôme U_n de degré n tel que, pour tout $\varphi \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$:

$$U_n(\cos \varphi) = \frac{\sin[(n+1)\varphi]}{\sin \varphi}.$$

- 3) a) Montrer que pour $i \neq j$, U_i et U_j sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle | \rangle$.
Indication : dans l'intégrale à calculer, on effectuera le changement de variables $\varphi = \text{Arccos } t$.
b) Par le même changement de variable, calculer $\|U_n\|$.

Exercice 5

Soit f continue de $[-\pi, \pi]$ vers \mathbf{R} . En définissant sur un espace à bien choisir un produit scalaire par la formule :

$$\langle u, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} u(t)v(t) dt$$

puis une projection judicieuse, orthogonale vis-à-vis de ce produit scalaire, établir des formules calculant à partir de f les réels a , b et c pour lesquels

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - a - b \sin t - c \cos t)^2 dt \quad \text{est minimal.}$$

Application numérique : déterminer $\inf_{a, b, c \in \mathbf{R}} \int_{-\pi}^{\pi} (t - a - b \sin t - c \cos t)^2 dt$.

Exercice 6

Soit E un espace euclidien de dimension finie notée $n+1$ et F un sous-espace de E .

- 1) Pour x élément de E , on pose $q(x) = \frac{d^2(x, F)}{n+1}$. Montrer que q est une forme quadratique positive sur E et qu'elle est définie positive si et seulement si F est réduit à $\{0\}$.
2) Dans cette question $E = \mathbf{R}^{n+1}$ avec le produit scalaire usuel et F est la droite engendrée par $(1, \dots, 1)$. On note Var la forme quadratique décrite à la question précédente et Cov la forme bilinéaire associée. Pour $x = (x_0, \dots, x_n)$ dans \mathbf{R}^{n+1} , expliciter des formules fournissant sa projection orthogonale sur F puis le réel positif $\text{Var}(x)$.
3) On note π la projection orthogonale sur F^\perp . En remarquant que $\text{Var}(x) = \|\pi(x)\|^2$ et en appliquant intelligemment le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz (cf. fiche 2 exercice 5), montrer que pour tous x, y pas dans F :

$$-1 \leq \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{\text{Var}(x)}\sqrt{\text{Var}(y)}} \leq 1$$

et que le quotient ci-dessus vaut ± 1 si et seulement si $(x, y, (1, \dots, 1))$ est lié, c'est-à-dire si et seulement si il existe a et b réels tels que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $y_i = ax_i + b$.

Exercice 7

On fixe $n+1$ points $P_i = (u_i, v_i)$ de \mathbf{R}^2 ($0 \leq i \leq n$) où on suppose les u_i deux à deux distincts et les v_i deux à deux distincts.

- 1) Dans \mathbf{R}^{n+1} on note :

$$\Pi = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid ((u_0, t_0), (u_1, t_1), \dots, (u_n, t_n)) \text{ alignés}\}.$$

Montrer que Π est un sous-espace de \mathbf{R}^{n+1} et qu'une base de Π est (e_0, e_1) où $e_0 = (1, 1, \dots, 1)$ et $e_1 = (u_0, u_1, \dots, u_n)$.

- 2) On appelle droite de régression de Y en X pour les points P_i la droite (non verticale) Δ d'équation $y = ax + b$ qui minimise la quantité :

$$\sum_{i=0}^n (v_i - au_i - b)^2.$$

Expliquer pourquoi trouver Δ revient à déterminer la projection orthogonale de (v_0, v_1, \dots, v_n) sur Π dans \mathbf{R}^{n+1} (muni de son produit scalaire usuel).

- 3) Expliciter la base orthonormée (ϵ_0, ϵ_1) obtenue par application à (e_0, e_1) du procédé de Gram-Schmidt.
 4) À partir des formules de la question précédente, écrire une expression de la projection orthogonale de (v_0, v_1, \dots, v_n) sur Π , et conclure en constatant que l'équation de Δ est :

$$y - \bar{v} = \frac{\text{Cov}(u, v)}{\text{Var}(u)}(x - \bar{u})$$

dans laquelle formule Var et Cov sont définies à l'exercice précédent, \bar{u} et \bar{v} sont les moyennes arithmétiques respectives des composantes de (u_0, u_1, \dots, u_n) et (v_0, v_1, \dots, v_n) .

- 5) On appelle droite de régression de X en Y pour les points P_i la droite (non horizontale) Δ d'équation $x = \alpha y + \beta$ qui minimise la quantité :

$$\sum_{i=0}^n (u_i - \alpha v_i - \beta)^2.$$

Quelle est l'équation de Δ' ?

En utilisant l'exercice précédent, montrer que $\Delta = \Delta'$ si et seulement si les points P_i sont alignés, et que lorsque les points P_i ne sont pas alignés, les deux droites Δ et Δ' se rencontrent en un point. Lequel ?

Exercice 8

Soit E et E' deux espaces vectoriels de dimension finie et soit i une application linéaire injective de E dans E' . On notera $F \subset E'$ l'image de i .

- 1)
 - a) Montrer qu'il existe au moins une application linéaire s de E' vers E telle que $s \circ i = \text{Id}_E$.
 - b) Montrer que $i \circ s$ est un projecteur, d'image F .
 - c) Dans cette sous-question, on suppose $\dim E < \dim E'$. Montrer que s n'est pas unique.
- 2) Dans cette question on suppose l'espace E' euclidien.
 - a) Montrer qu'il existe un et un seul s qui vérifie $s \circ i = \text{Id}_E$ et pour lequel le projecteur $i \circ s$ est un projecteur orthogonal. On l'appelle le pseudo-inverse (ou inverse généralisé) de l'injection i .
 - b) Montrer que ce s remarquable peut être caractérisé comme suit : "Pour tout y de E' , $s(y)$ est l'unique antécédent de y par i s'il existe ; à défaut c'est le x de E pour lequel $i(x)$ est le plus proche possible de y ".
- 3) Dans cette question, on suppose les deux espaces E et E' euclidiens et munis de bases orthonormées. On note n la dimension de E , m la dimension de E' , et A la matrice (m, n) de i dans les bases orthonormées de référence.
 - a) Pour X matrice-colonne $(n, 1)$, montrer que $AX \neq 0$ et en déduire que ${}^tX({}^tAA)X > 0$. En déduire que tAA peut être interprétée comme la matrice d'une forme quadratique définie positive, puis que tAA est inversible.
 - b) Montrer qu'un projecteur de E' est un projecteur orthogonal si et seulement si sa matrice (dans la base orthonormée de référence) est symétrique.
 - c) On note $B = ({}^tAA)^{-1} \times {}^tA$.
 Vérifier que $BA = I$, que $(AB)^2 = AB$ et que AB est une matrice symétrique. En déduire que B est la matrice du pseudo-inverse de i .
- 4) Soit (y_1, \dots, y_n) un système libre de n vecteurs de \mathbf{R}^m , F le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent et A la matrice (m, n) dont la j -ème colonne est formée des composantes de y_j .
 On munit \mathbf{R}^m du produit scalaire usuel. Écrire une formule, déduite de la question précédente, qui fournit la matrice de la projection orthogonale sur F à partir de la matrice A .