Université Claude Bernard - Lyon 1 — Automne 2015

Math I - PMI/CCP — Durée : 1 heure et 30 minutes

Problème - Devoir numéro 3

Le résultat de la question qui clôt la première partie est utilisé dans les questions finales des parties 2 et 3 ; c'est le seul résultat de la première partie utilisé dans la suite. Les parties 2 et 3 sont par ailleurs totalement indépendantes l'une de l'autre.

Dans tout le problème, on note $u^{(n)}$ la dérivée n-ème d'une fonction u (au moins) n fois dérivable, et on convient que $u^{(0)} = u$ pour toute fonction.

Dans toute la suite du problème, on notera f la fonction définie sur $]-\infty, 1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Première partie : calcul des dérivées de f en 0

1) a) Soit α un réel fixé. Pour $t > 0$, on note $\varphi_\alpha(t) = t^\alpha$.
Montrer que pour tout $n \geq 0$ et tout $t > 0$, $\varphi_\alpha^{(n)}(t) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)t^{\alpha-n}$.

b) Pour $n \geq 0$, donner une expression simple de $f^{(n)}(x)$, valable pour tout x dans $]-\infty, 1[$.

c) Déduire de cette expression que pour tout $n \geq 0$:

$$f^{(n)}(0) = \frac{(2n)!}{4^n\, n!}.$$

Deuxième partie : calcul des dérivées de Arcsin en 0

Dans cette partie, on note g la fonction définie sur $]-1, 1[$ par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) a) Soit u une fonction dérivable définie sur $]-1, 1[$. Montrer que si u est paire, alors u' est impaire et que si u est impaire, alors u' est paire.

b) En déduire que la fonction $g^{(n)}$ est paire si n est pair, et qu'elle est impaire si n est impair.

c) Calculer $g^{(2k+1)}(0)$ pour tout $k \geq 0$.

Dans la suite de cette section, on définit une fonction φ sur $\mathbf{Z}$ en posant $\varphi(m) = 0$ si $m < 0$ et $\varphi(m) = 1/m!$ si $0 \leq m$, puis on définit une fonction c sur $\mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ en posant, pour tout $n \geq 0$ et tout $k \in \mathbf{Z}$:

$$c(n,k) = \begin{cases} \dfrac{2^{2k-n}\, n!}{(n-k)!(2k-n)!} & \text{si } k \in [\frac{n}{2}, n] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et tout $n \in \mathbf{N}$: $c(n,k) = 2^{2k-n}\, n! \varphi(n-k)\varphi(2k-n)$.

4) Montrer que pour tout $m \in \mathbf{Z}$: $\varphi(m-1) = m\varphi(m)$.

5) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et tout $n \in \mathbf{N}$: $2c(n, k-1) + (2k-n)c(n,k) = c(n+1, k)$.
Indication : dans cette question, le correcteur n'attend **pas** une démonstration par récurrence.

6) Montrer que pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$:

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} c(n,k) x^{2k-n} f^{(k)}(x^2).$$

Indication : dans cette question, le correcteur **attend** une démonstration par récurrence.

7) Soit $m \geq 0$ un entier. Montrer que pour tout $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$:

$$g^{(2m)}(x) = \sum_{k=m}^{2m} c(2m,k) x^{2k-2m} f^{(k)}(x^2).$$

8) En faisant tendre x vers 0 dans l'identité écrite à la fonction précédente, montrer que pour tout $m \geq 0$:

$$g^{(2m)}(0) = \frac{(2m)!}{m!} f^{(m)}(0).$$

9) Conclure en donnant une expression raisonnablement simple de $\text{Arcsin}^{(n)}(0)$ en fonction de l'entier strictement positif n (la réponse fera jouer la parité de n).

Troisième partie : dénombrement de parenthésages (les "nombres de Catalan")
Dans la suite du problème on note h l'application définie sur $]-\infty, \frac{1}{4}[$ par :

$$h(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}.$$

Dans la suite du problème, on notera, pour tout $n \geq 0$:

$$c_n = \frac{h^{(n)}(0)}{n!}.$$

10) Montrer que la fonction h satisfait en tout point x de son ensemble de définition à l'identité :

$$(*) \qquad [h(x)]^2 = h(x) - x.$$

11) Dans cette question, on utilisera sans le démontrer le théorème suivant, dit "formule de Leibniz" : Soit $n \geq 0$ un entier, et soit u et v deux fonctions (au moins) n fois dérivables à valeurs réelles, définies sur un même intervalle de $\mathbf{R}$. La dérivée n-ème de leur produit uv est donnée par :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Soit $n \geq 2$. En dérivant l'identité $(*)$, montrer la relation :

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}.$$

Dans la suite du problème, pour tout $n \geq 1$, on note d_n le nombre de façons de mettre des parenthèses pour calculer un produit de n termes. Pour clarifier ce que ça signifie, voici les façons de calculer un produit de quatre termes $abcd$: on peut faire les calculs des 5 façons suivantes :

$$a(b(cd)) \text{ ou } a((bc)d) \text{ ou } (ab)(cd) \text{ ou } (a(bc))d \text{ ou } ((ab)c)d,$$

et donc $d_4 = 5$.
(Pour les petites valeurs de n, il convient de considérer que $d_1 = 1$ et $d_2 = 1$.)
12) Montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$d_n = \sum_{k=1}^{n-1} d_k d_{n-k}.$$

13) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $c_n = d_n$.
14) a) À partir d'une relation simple entre h' et f, montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$c_n = \frac{4^{n-1} f^{(n-1)}(0)}{n!}.$$

b) Déduire de tout ce qui précède que pour tout $n \geq 1$,

$$d_n = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2}.$$