Université Claude Bernard - Lyon 1 — Automne 2016

Mathématiques III - PMI — 5 décembre 2016. Durée : 1 heure et 30 minutes

Devoir numéro 4

On attend une rédaction correcte ; les réponses peu compréhensibles ou mal justifiées seront sanctionnées. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1
On note A la matrice à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice est A dans la base canonique.
On admettra sans effectuer le calcul que le polynôme caractéristique de u admet une racine réelle triple.

1) Au vu de l'information donnée à la ligne précédente, déterminer presque sans calculs le polynôme caractéristique χ_u.

2) On pose $f_3 = (0,0,1)$, $f_2 = (u+\mathrm{Id})(f_3)$ et $f_1 = (u+\mathrm{Id})(f_2)$.

a) Calculer explicitement les vecteurs f_2 et f_1. Vérifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbf{R}^3$.

b) Déterminer le vecteur $(u+\mathrm{Id})(f_1)$.

c) Écrire la matrice T de u dans la base (f_1, f_2, f_3) et expliciter une matrice P telle que $T = P^{-1}AP$.

Exercice 2
Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et soit F et G deux sous-espaces de E tels que $E = F \oplus G$.
Soit u un endomorphisme de E qui laisse stables F et G.
On note $v : F \to F$ la restriction de u à F et $w : G \to G$ la restriction de u à G.
On suppose que les polynômes minimaux respectifs de v et w sont :

$$\pi_v = (X-1)(X-5) \text{ et } \pi_w = (X-1)(X+1)^2.$$

1) Montrer que $\pi_u(w) = 0$, et en déduire que $\pi_w \mid \pi_u$. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

2) On note $Q = (X-1)(X-5)(X+1)^2$. Montrer que $Q(u) = 0$.

3) Déterminer π_u.

Exercice 3
On note B la matrice réelle :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que si une matrice carrée réelle M commute avec B, alors M est diagonale.

2) Montrer que pour tous x, y, z réels, il existe un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P(1) = x$, $P(2) = y$ et $P(3) = z$. (Indication : il pourra être confortable de rechercher un P de degré inférieur ou égal à 2).

3) Montrer que si M réelle carrée commute avec B, alors il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $M = P(B)$.

4) VRAI ou FAUX ? Soit C semblable à B. Si une matrice M réelle carrée commute avec C alors elle est de la forme $P(C)$ pour un polynôme à coefficients réels (on demande bien sûr une réponse justifiée).

Exercice 4

1) Montrer que $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

2) Soit h l'application de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$ définie par :

$$\begin{cases} h(0,0) = 0 \\ h(x,y) = \dfrac{x^3 - \sin^3 y}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}.$$

Montrer que h admet des dérivées partielles du premier ordre en tout point de $\mathbf{R}^2$. <u>Il n'est **PAS** demandé</u> de calculer ces dérivées partielles.

Exercice 5

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de l'équation :

$$(E) \qquad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (1+x-y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

On sera amené à introduire l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de l'équation :

$$(E') \qquad \forall (u,v) \in \mathbf{R}^2 \qquad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0.$$

1) On note $\varphi \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'application définie par :

$$\varphi(u,v) = (u, u + ve^{-u}).$$

a) Vérifier que φ est une bijection, et expliciter la bijection réciproque.

b) Justifier pourquoi φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

2) Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. On note $g = f \circ \varphi$. Exprimer la dérivée partielle $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ en utilisant la règle de la chaîne.

3) Montrer que pour toute f application de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$,

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et est solution de } (E) \iff f \circ \varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et est solution de } (E')$$

4) a) Montrer que pour toute application g de classe $\mathcal{C}^1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ et tout $(u,v) \in \mathbf{R}^2$,

$$g(u,v) = g(0,v) + \int_0^u \frac{\partial g}{\partial u}(t,v)\,dt.$$

b) En déduire que si g est solution de (E'), alors il existe une fonction $c \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que :

$$\forall (u,v) \in \mathbf{R}^2, \qquad g(u,v) = c(v).$$

et remarquer que la fonction c est de classe $\mathcal{C}^1$.

c) En déduire une description simple des solutions de l'équation (E').

5) Conclure en fournissant une description simple des solutions de (E).