CONCOURS COMMUN 2004
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Mardi 18 mai 2004 de 14h00 à 18h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondante.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

ANALYSE

PREMIERE PARTIE

Soit (E) l'équation différentielle : $(1-x)^2 y' = (2-x)y$.
On note I l'intervalle $]-\infty, 1[$.

1. Calculer une primitive A de la fonction a définie sur I par : $a(x) = \dfrac{2-x}{(1-x)^2}$.

2. Intégrer (E) sur I.

Soit f la fonction définie sur I par : $f(x) = \dfrac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$.

~~**3.** Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre~~ 3.

DEUXIEME PARTIE

4. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :

$f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{1-x})e^{\frac{1}{1-x}}$ pour tout réel x appartenant à I.

La démonstration permet d'exprimer $P_{n+1}(X)$ en fonction de $P_n(X)$, $P'_n(X)$ et X . Expliciter cette relation.

5. Préciser P_0 , P_1 , P_2 et P_3.

~~**6.** En dérivant n fois les deux membres de l'équation (E), prouver que pour tout entier positif n :~~

$$P_{n+1}(X) = [(2n+1)X + X^2]\, P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X)$$

On utilisera la formule de Leibniz.

TROISIEME PARTIE

Le but de cette partie est d'établir quelques propriétés des nombres $a_n = f^{(n)}(0)$.

7. Pour tout entier positif n, exprimer a_{n+1} en fonction de n, a_n et a_{n-1}.

8.

a) Préciser, sans nouveau calcul : a_0 , a_1 , a_2 , a_3. En déduire a_4.

~~b) Préciser le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 4.~~

9. On désigne par (u_p) la suite définie pour tout entier naturel p par : $u_p = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!}$.

~~En appliquant une formule de Taylor à la fonction exponentielle, prouver que la suite (u_p) converge vers e.~~ On admet que la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers e.

p et n désignant des entiers naturels quelconques, on pose :

$$S_p(n) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i\,!)^2}$$

10.

a) Exprimer $S_p(0)$ et $S_p(1)$ à l'aide de u_p et u_{p-1} pour $p \geq 1$.

b) Prouver que les suites $p \to S_p(0)$ et $p \to S_p(1)$ convergent et préciser leur limite en fonction de e.

11. Prouver que quels que soient les entiers p et n supérieurs ou égaux à 1 :

$$S_p(n+1) - (2n+2)\, S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$

12. En déduire que pour tout entier naturel n, la suite $p \to S_p(n)$ converge.

~~13. Prouver que :~~ $\cancel{a_n = \lim_{p\to+\infty} \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} = \lim_{p\to+\infty} n! \sum_{i=0}^{p} \binom{n+i}{n} \frac{1}{i!}}$

FIN DU PROBLEME D'ANALYSE