Problème 4-CCP

Exercice 1. 11 points

1. 2 points. Pour tout nombre premier p et pour tout k, $1 \leq k \leq p-1$, p divise $\binom{p}{k}$. On pourra montrer que montrer que :
$$\binom{p}{k} = \frac{p}{k}\binom{p-1}{k-1}$$
2. 2 points+1 Points+3points. Soit p un nombre premier, montrer par récurrence sur $a \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a^p \equiv a \quad [p]$.
Expliciter le cas $a = 0$. Puis montrer que ce résultat reste vrai pour $a < 0$ (on posera $b = -a > 0$).
3. 4 points Soit p un nombre premier, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, a n'étant pas un multiple de p (autrement dit a n'est pas un multiple de p), montrer que : $a^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$

Correction exercice 1 :

1. 2 points
$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!\,(p-k)!} = \frac{p}{k}\frac{(p-1)!}{(k-1)!\,(p-k)!} = \frac{p}{k}\frac{(p-1)!}{(k-1)!\,\big((p-1)-(k-1)\big)!} = \frac{p}{k}\binom{p-1}{k-1}$$
Donc
$$k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$$
Pour $1 \leq k \leq p-1$, p et k sont premier entre eux de plus p divise $k\binom{p}{k}$ donc p divise $\binom{p}{k}$ d'après le théorème de Gauss
2. Si $a \geq 1$, par récurrence sur a. 2 points
Si $a = 1$, $1^p = 1 \equiv 1 \quad [p]$
Si $a^p \equiv a \quad [p]$
$$(a+1)^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^k 1^{p-k} = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^k = \binom{p}{0}a^0 + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}a^k + \binom{p}{p}a^p = 1 + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}a^k + a^p$$
$$\equiv 1 + a^p \quad [p] \equiv 1 + a \quad [p]$$
Car pour tout nombre premier p et pour tout k, $1 \leq k \leq p-1$, p divise C_p^k.
Donc $a^p \equiv a \quad [p]$ pour tout $a > 0$.
1 point Si $a = 0$, c'est une évidence.
4 points Si $a < 0$, on pose $b = -a > 0$ donc $b^p \equiv b \quad [p]$, ce qui donne $(-a)^p \equiv -a \quad [p]$, par suite $(-1)^p a^p \equiv -a \quad [p]$. On distingue alors deux cas, si $p > 2$, p est impair donc $(-1)^p = -1$ et le résultat est montré. Si $p = 2$ alors $(-1)^2 a^2 \equiv -a \quad [2]$, puis comme $2a \equiv 0 \quad [2]$ donc $a \equiv -a \quad [2]$ on en déduit que $(-1)^2 a^2 \equiv -a \quad [2] \Leftrightarrow a^2 \equiv a \quad [2]$, ce qui montre le résultat.
3. 1 point Si a n'étant pas un multiple de p, a et p sont premier entre eux, l'identité de Bézout permet d'affirmer qu'il existe u et v tels que $au + pv = 1$.
On multiplie $a^p \equiv a \quad [p] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ a^p = a + kp$ par u
1 point

$$a^p u = au + kpu \Leftrightarrow a^{p-1}au = au + kpu \Leftrightarrow a^{p-1}(1-pv) = 1 - pv + kpu \Leftrightarrow a^{p-1} - a^{p-1}pv$$
$$= 1 - pv + kpu \Leftrightarrow a^{p-1} = 1 + a^{p-1}pv - pv + kpu \Leftrightarrow a^{p-1}$$
$$= 1 + p(va^{p-1} - v + ku)$$

3 point Ce qui donne bien $a^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$

Exercice 2.

Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ une suite de polynômes de la variable x, définie par les relations :

$$P_0(x) = 2, P_1(x) = x + \frac{1}{2}, \qquad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad 16P_n(x) - 8(2x+1)P_{n-1}(x) + P_{n-2}(x) = 0$$

On notera P_n' le polynôme dérivée de P_n.

1.
   a.
   b. Expliciter P_2 et P_3. 2 points
   c. Déterminer le degré de P_n et son coefficient dominant. 2 points
   d. Montrer que $P_n(x) = (-1)^n P_n(-x-1)$. 2 points
   e. Etablir une relation analogue entre $P_n'(x)$ et $P_n'(-x-1)$. 1 point
   f. Montrer que si α est une racine de P_n, il en est de même de $-1-\alpha$. 1 point
   g. Montrer qu'il existe une racine commune à tous les P_{2n+1} et à tous les P_{2n}'. 3 points
2. Dans cette question on suppose que $-1 \leq x \leq 0$.
   a. Justifier l'existence d'un unique $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $x = -\cos^2(\theta)$. 1 point
   b. Dans la suite, on pose $f_n(\theta) = P_n(-\cos^2(\theta))$ et $g_n(\theta) = P_n'(-\cos^2(\theta))$.
      Exprimer $f_1(\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$ et $f_2(\theta)$ en fonction de $\cos(4\theta)$. 3 points
   c. Montrer par récurrence que : $f_n(\theta) = \frac{2(-1)^n}{4^n}\cos(2n\theta)$. 4 points
      Indication : montrer que $2\cos(2\theta)\cos(2(n-1)\theta) - \cos(2(n-2)\theta) = \cos(2n\theta)$
   d. Déterminer l'ensemble des racines de P_n, pour $n \geq 1$. On commencera par celles appartenant à $[-1,0]$. 3 points
   e. On suppose $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Pour $n \geq 1$, exprimer $g_n(\theta)$ en fonction de $\frac{\sin(2n\theta)}{\sin(\theta)}$.
      En déduire l'ensemble des racines du polynôme P_n' pour $n \geq 2$. On commencera par celles appartenant à $]-1,0[$. 3 points
   f. Calculer $P_n(0)$, $P_n(-1)$, $P_n'(0)$, $P_n'(-1)$ et $P_{2n}'\left(-\frac{1}{2}\right)$ pour $n \geq 1$. 4 points
3. Dans cette question, on suppose, que $x < -1$ ou $x > 0$.
   a. Soit $\left(z_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite définie par récurrence par
      $$\forall n \geq 2, \qquad z_{n-2}(x) - 8(2x+1)z_{n-1}(x) + 16z_n(x) = 0 \quad (E)$$
      Déterminer $z_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de n et x et de deux fonctions a et b, qui dépendent de x, que l'on ne cherchera pas à déterminer. 2 points
   b. Déterminer a et b deux réels tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$,
      $$P_n(x) = a(x)\left(x + \frac{1}{2} - \sqrt{x(x+1)}\right)^n + b(x)\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x(x+1)}\right)^n$$
      2 points
4. Montrer que la famille $(P_n)_{n\geq 0}$ vérifie :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, 2x(x+1)P_n'' + (2x+1)P_n'(x) - 2n^2P_n(x) = 0$$
   Indication : partir de $P_n(-\cos^2(\theta)) = \frac{2(-1)^n}{4^n}\cos(2n\theta)$ et dériver par rapport à θ. 3 points

Correction exercice 2 :

1.
   a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
      $$16P_2(x) = 8(2x+1)P_1(x) - P_0(x) = 8(2x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right) - 2 \Rightarrow P_2(x) = \frac{1}{16}(16x^2 + 16x + 2)$$
      $$= x^2 + x + \frac{1}{8}$$

$$16P_3(x)=8(2x+1)P_2(x)-P_1(x)=8(2x+1)\left(x^2+x+\frac{1}{8}\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow P_3(x)$$
$$=\frac{1}{16}\left(16x^3+24x^2+10x+1-x-\frac{1}{2}\right)=x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{16}x+\frac{1}{32}$$

b. D'après a. il semble que P_n est de degré n et qu'il soit unitaire pour $n\geq 1$, montrons le par récurrence

$$(H_n)\ \exists Q_n\in\mathbb{R}[X] \text{ avec } d^\circ Q_n\leq n-1 \text{ tel que } P_n(x)=x^n+Q_n(x)$$

La propriété est vraie pour $n=1$ et $n=2$, alors par récurrence double

$$P_n(x)=\frac{1}{16}\big(8(2x+1)P_{n-1}(x)-P_{n-2}(x)\big)$$
$$=\frac{1}{16}\Big(8(2x+1)\big(x^{n-1}+Q_{n-1}(x)\big)-x^{n-2}-Q_{n-2}(x)\Big)$$
$$=x^n+\frac{1}{16}\big(8x^{n-1}+8Q_{n-1}(x)++8xQ_{n-1}(x)-x^{n-2}-Q_{n-2}(x)\big)$$

On pose $Q_n(x)=\frac{1}{16}\big(8x^{n-1}+8Q_{n-1}(x)++8xQ_{n-1}(x)-x^{n-2}-Q_{n-2}(x)\big)$alors $d^\circ Q_n\leq n-1$et
Car $d^\circ Q_{n-1}\leq n-2$ et $d^\circ Q_{n-2}\leq n-3$, ce qui achève la récurrence.

c. $P_0(-x-1)=2=P_0(x)$ et $P_1(-x-1)=(-x-1)+\frac{1}{2}=-x-\frac{1}{2}=-P_1(x)$

Montrons par une récurrence double que pour tout $n\geq 0$, $P_n(-x-1)=(-1)^nP_n(x)$

On suppose donc que $P_{n-1}(-x-1)=(-1)^{n-1}P_{n-1}(x)$ et que $P_{n-2}(-x-1)=(-1)^{n-2}P_{n-2}(x)$

C'est vrai au deux premiers rangs.

$$16P_n(-x-1)=8(2(-x-1)+1)P_{n-1}(-x-1)-P_{n-2}(-x-1)$$
$$=8(-2x-1)P_{n-1}(-x-1)-P_{n-2}(-x-1)$$
$$=8(-2x-1)\big((-1)^{n-1}P_{n-1}(x)\big)-\big((-1)^{n-2}P_{n-2}(x)\big)$$
$$=(-1)^n\big(8(2x+1)P_n(x)-P_{n-2}(x)\big)=(-1)^nP_n(x)$$

Ce qui achève la récurrence.

d. En dérivant $P_n(-x-1)=(-1)^nP_n(x)$, on obtient pour tout $x\in\mathbb{R}$.

$$-P_n'(-x-1)=(-1)^nP_n'(x)\Leftrightarrow P_n'(-x-1)=(-1)^{n+1}P_n'(x)$$

e. Soit α une racine de P_n, on a :

$$P_n(-1-\alpha)=(-1)^nP_n(\alpha)=0$$

Donc $-1-\alpha$ est aussi une racine de P_n.

f. On a pour tous $n\in\mathbb{N}$ et pous tous $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} P_n(-x-1)=(-1)^nP_n(x)\\ P_n'(-x-1)=(-1)^{n+1}P_n'(x)\end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} P_{2n+1}(-x-1)=(-1)^{2n+1}P_{2n+1}(x)=-P_{2n+1}(x)\\ P_{2n}'(-x-1)=(-1)^{2n+1}P_{2n}'(x)=-P_{2n}'(x)\end{cases}$$

Puis pour $x=-\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} P_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)=-P_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)\\ P_{2n}'\left(-\frac{1}{2}\right)=-P_{2n}'\left(-\frac{1}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} P_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)=0\\ P_{2n}'\left(-\frac{1}{2}\right)=0\end{cases}$$

2.

a. L'application $\theta\to-\cos^2(\theta)$ est strictement croissante et continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ son image est $[-1,0]$, c'est une bijection donc pour tout $x\in[-1,0]$ il existe un unique $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $x=-\cos^2(\theta)$.

b.

$$f_1(\theta)=P_1(\cos(\theta)=\frac{1}{2}-\cos^2(\theta)=\frac{1}{2}-\frac{1+\cos(2\theta)}{2}=-\frac{\cos(2\theta)}{2}$$

$$f_2(\theta) = P_2(\cos(\theta) = \cos^4(\theta) - \cos^2(\theta) + \frac{1}{8} = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4 - \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}$$
$$= \frac{e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}}{16} - \frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{4} + \frac{1}{8}$$
$$= \frac{e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta} - 4\left(e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}\right) + 2}{16} = \frac{e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}}{16}$$
$$= \frac{2\cos(4\theta)}{16} = \frac{\cos(4\theta)}{8}$$

c. L'égalité est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, et toujours avec une récurrence double pour $n \geq 2$

$$f_{n-2}(\theta) = \frac{2(-1)^{n-2}}{4^{n-2}} \cos(2(n-2)\theta) \quad \text{et } f_{n-1}(\theta) = \frac{2(-1)^{n-1}}{4^{n-1}} \cos(2(n-1)\theta)$$

$$f_n(\theta) = \frac{1}{16}\left(8(-2\cos^2(\theta) + 1) f_{n-1}(\theta) - f_{n-2}(\theta)\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(8(-2\cos^2(\theta) + 1)\frac{2(-1)^{n-1}}{4^{n-1}}\cos(2(n-1)\theta) - \frac{2(-1)^{n-2}}{4^{n-2}}\cos(2(n-2)\theta)\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(8\cos(2\theta)\frac{2(-1)^{n}}{4^{n-1}}\cos(2(n-1)\theta) - \frac{2(-1)^{n}}{4^{n-2}}\cos(2(n-2)\theta)\right)$$
$$= \frac{1}{16}\frac{2(-1)^n}{4^n}\left(8\cos(2\theta)\,4\cos(2(n-1)\theta) - 16\cos(2(n-2)\theta)\right)$$
$$= \frac{2(-1)^n}{4^n}\left(2\cos(2\theta)\cos(2(n-1)\theta) - \cos(2(n-2)\theta)\right) = \frac{2(-1)^n}{4^n}\cos(2n\theta)$$

$$2\cos(2\theta)\cos(2(n-1)\theta) - \cos(2(n-2)\theta)$$
$$= 2\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2}\frac{e^{2(n-1)i\theta} + e^{-2(n-1)i\theta}}{2} - \frac{e^{2(n-2)i\theta} + e^{-2(n-2)i\theta}}{2}$$
$$= \frac{e^{2ni\theta} + e^{(-2n+4)i\theta} + e^{(2n-4)i\theta} + e^{-2ni\theta}}{2} - \frac{e^{(2n-4)i\theta} + e^{-(2n-4)i\theta}}{2}$$
$$= \frac{e^{2ni\theta} + e^{-2ni\theta}}{2} = \cos(2n\theta)$$

Ce qui achève la récurrence.

d. Soit $n \geq 1$, on pose $x = -\cos^2(\theta)$

$$P_n(x) = 0 \Leftrightarrow f_n(\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(-1)^n}{4^n}\cos(2n\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(2n\theta) = 0$$

Comme $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq 2n\theta \leq n\pi$, par conséquent

$$\exists k \in [\![0, n-1]\!], 2n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], \theta = \frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}$$

Les solutions sont les

$$x_k = -\cos^2\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}\right), k \in [\![0, n-1]\!]$$

Cela donne n racines distinctes, mais $d°P_n = n$ donc il n'y en a pas plus.

e. Pour $n \geq 2$

On dérive par rapport à θ l'égalité

$$f_n(\theta) = P_n(-\cos^2(\theta)) = \frac{2(-1)^n}{4^n}\cos(2n\theta)$$

$$-2\cos(\theta)\,(-\sin(\theta))P_n'(-\cos^2(\theta)) = \frac{2(-1)^n}{4^n}(-2n\sin(2n\theta))$$

$$g_n(\theta) = P_n'(-\cos^2(\theta)) = -\frac{\frac{2(-1)^n}{4^n}2n\sin(2n\theta)}{2\cos(\theta)\sin(\theta)} = \frac{(-1)^n}{4^{n-1}}\frac{\sin(2n\theta)}{\sin(\theta)}$$

Pour $-1 < x < 0$ on a $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $0 < 2n\theta < n\pi$, par conséquent

$$\exists k \in [\![1, n-1]\!], 2n\theta = k\pi \Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!], \theta = \frac{k\pi}{2n}$$

Les racines sont les $y_k = \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, $\exists k \in [\![1, n-1]\!]$. Ces racines sont distinctes et il y en a $n-1$, comme P_n' est degré $n-1$, on les a toutes.

f. On a $x = -\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $P_n(0) = f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2(-1)^n}{4^n}\cos(n\pi) = \frac{2}{4^n}$

La relation $P_n(-x-1) = (-1)^n P_n(x)$ donne $P_n(-1) = (-1)^n P_n(0) = \frac{2(-1)^n}{4^n}$.

L'application $g_n(\theta) = P_n'(\cos(\theta))$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que :

$$g_n(0) = \lim_{\theta\to 0^+} g_n(\theta) = -2n\frac{2(-1)^n}{4^n}\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = n^2\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n-1}}\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin(n\theta)}{n\theta}\frac{\theta}{\sin(\theta)}$$
$$= n^2\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n-1}}$$

Or $P_n'(-1) = P_n'(-\cos^2(0)) = g_n(0)$, donc $P_n'(-1) = n^2\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n-1}}$

Comme $P_n'(-x-1) = (-1)^{n+1}P_n'(x)$, pour $x = -1$

$$P_n'(0) = (-1)^{n+1}P_n'(0) = \frac{n^2}{4^{n-1}}$$

Et enfin

$$P_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right) = P_{2n}\left(-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = f_{2n}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2(-1)^{2n}}{4^{2n}}\cos\left(\frac{4n\pi}{4}\right) = \frac{2(-1)^n}{4^{2n}}$$

3.

a. Remarque $x(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

Il s'agit d'une équation linéaire du second ordre (x est bien sûr fixé), son équation caractéristique est

$$16r^2(x) - 8(2x+1)r(x) + 1 = 0$$

En faisant attention à mettre $z_n(x)$ en premier et $z_{n-2}(x)$ en dernier.

Son discriminant est :

$$\Delta = 64(2x+1)^2 - 64 = 64(4x^2+4x+1) - 64 = (16)^2 x(x+1) > 0$$

Donc les deux solutions sont

$$r_1(x) = \frac{8(2x+1) - 16\sqrt{x(x+1)}}{32} = \frac{2x+1-2\sqrt{x(x+1)}}{4} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2} - \sqrt{x(x+1)}\right)$$

Et

$$r_2(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x(x+1)}\right)$$

Ce qui montre que les solutions de (E) sont pour tous $n \geq 0$.

$$z_n(x) = a(x)\left(x + \frac{1}{2} - \sqrt{x(x+1)}\right)^n + b(x)\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x(x+1)}\right)^n$$

Où a et b sont des fonctions.

b. Pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ la suite $n \to P_n(x)$ vérifie la relation (E), donc il existe deux fonctions a et b telles que :

$$P_n(x) = a(x)\frac{\left(x + \frac{1}{2} - \sqrt{x(x+1)}\right)^n}{2^n} + b(x)\frac{\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x(x+1)}\right)^n}{2^n}$$

$$\begin{cases} P_0(x) = 2 \\ P_1(x) = x + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) + b(x) = 2 \\ a(x)\frac{x + \frac{1}{2} - \sqrt{x(x+1)}}{2} + b(x)\frac{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x(x+1)}}{2} = x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(x) + b(x) = 2 \\ \left(a(x) + b(x)\right)\frac{x + \frac{1}{2}}{2} + \left(a(x) - b(x)\right)\frac{x + \frac{1}{2}}{2} = x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(x) + b(x) = 2 \\ 2\frac{x + \frac{1}{2}}{2} + \left(a(x) - b(x)\right)\frac{x + \frac{1}{2}}{2} = x + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) + b(x) = 2 \\ a(x) - b(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) = 1 \\ b(x) = 1 \end{cases}$$

On en déduit

$$P_n(x)=\frac{\left(x+\frac{1}{2}-\sqrt{x(x+1)}\right)^n}{2^n}+\frac{\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x(x+1)}\right)^n}{2^n}$$

4. Pour tout $x\in[-1,0]$, il existe un unique $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que :

$$P_n(x)=P_n(-\cos^2(\theta))=\frac{2(-1)^n}{4^n}\cos(2n\theta)$$

On dérive par rapport à θ

$$-2\cos(\theta)\,(-\sin(\theta))P_n'(-\cos^2(\theta))=\frac{2(-1)^n}{4^n}(-2n\sin(2n\theta))\Leftrightarrow \sin(2\theta)\,P_n'(-\cos^2(\theta))$$
$$=\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n-1}}n\sin(2n\theta)$$

On dérive une seconde fois

$$\sin^2(2\theta)\,P_n''(-\cos^2(\theta))+2\cos(2\theta)\,P_n'(-\cos^2(\theta))=\frac{2(-1)^{n+1}}{4^{n-1}}n^2\cos(2n\theta)$$

Comme $\sin^2(2\theta)=4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)=4\cos^2(\theta)\,(1-\cos^2(\theta))=-4x(1+x)$ et $\cos(2\theta)=1-2\cos^2(\theta)-1=-2x^2-1$

$$-4x(x+1)P_n''(x)-2(2x^2+1)P_n'(x)=-4n^2P_n(x)$$

Ou encore

$$2x(x+1)P_n''(x)+(2x^2+1)P_n'(x)-2n^2P_n(x)=0$$

$2x(x+1)P_n''(x)+(2x^2+1)P_n'(x)-2n^2P_n(x)$ est un polynôme identiquement nul sur $[-1,0]$, il est donc nul sur $\mathbb{R}$.